100 ...
168

Lit

Handbuch

der

rechnenden Aſtronomie

von

Chriſtian Friedrich Rüdiger

Profeſſor und aſtronomiſcher Obſervator zu Leipzig, der ökonomiſchen Societät daſelbſt Ehrenmitglied, auch der Königl. Groſsbritanniſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Göttingen Correſpondent

Zweyter Band

mit zwey Kupfern

Zweyte Ausgabe

Leipzig

in Joachims Buchhandlung

1802

PRAKTISCHE ANWEISUNG

ZUR

BERECHNUNG

EBENER

UND

SPHÄRISCHER DREIECKE

DURCH

AUFGABEN AUS DER ASTRONOMIE

ERLÄUTERT

VON

CHRISTIAN FRIEDRICH RÜDIGER

PROFESSOR UND ASTRONOM. OBSERVATOR ZU LEIPZIG, DER ÖKONOMISCH. SOCIETÄT DASELBST EHRENMITGLIED, AUCH DER KÖN. GROSBRITANNISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN CORRESPONDENT

MIT ZWEY KUPFERN

ZWEYTE AUSGABE

LEIPZIG

IN JOACHIMS BUCHHANDLUNG

1802

Handbuch

der

rechnenden Aſtronomie

Zweyter Band

Vorrede.

Auch in dieſem zweyten Bande meines Handbuchs der rechnenden Aſtronomie liefere ich einen Auszug aus Vorleſungen, die ich auf hieſiger Univerſität über die Trigonometrie und Aſtronomie zu verſchiedenen mahlen gehalten. Ich habe, wie ich mir ſchmeichle, die beſten und bequemſten Auflöſungen ſämmtlicher Aufgaben der ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie, wohl ziemlich alle mitgetheilt, zum Grunde die ſchätzbaren Werke eines Käſtner und

Cagnoli gelegt, und durch ſorgfältig ausgewählte Beyſpiele den vorzugsweiſe gebrauchten analytiſchen Vortrag, auf das deutlichſte zu erläutern mich bemüht. Für dieſe geringe Arbeit wird der Beyfall Mathematikverſtändiger und etwas zur Verbreitung des mathematiſchen, vornehmlich aber des aſtronomiſchen Studiums beygetragen zu haben, meine gröſste Belohnung ſeyn.

Leipzig den 4ten Auguſt
1799.

Chriſtian Friedrich Rüdiger.

INNHALT.

Aufgaben der ebenen Trigonometrie.

Aufgaben der sphärischen Trigonometrie.

Anwendung der vorhergehenden trigonometriſchen Formeln auf Aſtronomie.

Vier und zwanzig Fälle

welche bey

Auflösung rechtwinklichter

geradlinichter Dreiecke

vorkommen können.

Man ſehe Tafel I.
Fig. I.

A = 90°; B und C ſpitzig.

AB = c; AC = b;	BC = a.
Die beyden Perpendikel.	Die Hypotenuſe.

Erster Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, B d. i. ein Perpendikel und der anliegende Winkel.	b oder das andere Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = c \cdot \text{Tang } B$$
$$\log b = \log c + \log \text{Tang } B - 10$$

Beyspiel.

$c = 64$ Ruthen; $B = 36° 52' 0''$,

log c	=	1,8061800
+ log Tang B — 10	=	9,8750102 — 10
log b	=	1,681 1902
b	=	47,994 Ruthen.

Zweyter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, B d. i. ein Perpendikel und der anliegende Winkel.	a oder die Hypotenuse.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{c}{\text{Cosin } B}$$
$$\log a = 10 + \log c - \log \text{Cosin } B$$

Dritter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, C d.i. ein Perpendikel u. der gegenüberstehende Winkel.	b oder das andere Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = c \cdot \text{Cotang } C$$

$$\log b = \log c + \log \text{ Cotang } C - 10$$

Vierter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, C d. i. ein Perpendikel und der gegenüberstehende Winkel.	a oder die Hypotenuse.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{c}{\text{Sin } C}$$

$$\log a = 10 + \log c - \log \text{Sin } C$$

Fünfter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, B d. i. die Hypotenuse und ein spitziger Winkel.	c oder das dem gegebenen Winkel anliegende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c = a \cdot \text{Cosin } B$$

$$\log c = \log a + \log \text{Cosin } B - 10$$

Sechster Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, B d. i. die Hypotenuse und ein spitziger Winkel.	b oder das dem gegebenen Winkel gegenüberstehende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = a \cdot \text{Sin } B$$

$$\log b = \log a + \log \text{Sin } B - 10$$

Siebenter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, a oder ein Perpendikel und die Hypotenuse.	B oder der dem gegebenen Perpendikel anliegende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$1)\quad \text{Cos}\, B = \frac{c}{a}$$

$$\log \text{Cos}\, B = 10 + \log c - \log a.$$

Wenn B ein kleiner Winkel ist:

$$2)\quad \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}$$

$$\log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} B = \frac{20 + \log (a-c) - \log 2 - \log a}{2}$$

oder:

$$3)\quad \text{Tang}\, \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$$

$$\log \text{Tang}\, \tfrac{1}{2} B = \frac{20 + \log (a-c) - \log (a+c)}{2}$$

Beyspiel.

c = 64 Ruthen; a = 79,997 R.

Rechnung nach Formel 1.

10 + log c	=	11,8061800
— log a	=	1,9030716
log Cos B	=	9,9031084
B	=	36° 52′ 0″

Rechnung nach Formel 2.

$$20 + \log(a-c) = 21,2040385$$
$$-\log 2 = 0,3010300$$

Reſt 1 $= 20,9030085$
$-\log a = 1,9030716$

Reſt 2 $= 18,9999369$
Hälfte $= \log \text{Sin} \frac{1}{2} B = 9,4999684$
$\frac{1}{2} B = 18^\circ\ 26'\ 0''$
$B = 36.\ 52.\ 0.$

Rechnung nach Formel 3.

$$20 + \log(a-c) = 21,2040385$$
$$-\log(a+c) = 2,1583534$$

Reſt $= 19,0456851$
Hälfte $= \log \text{Tang} \frac{1}{2} B = 9,5228425$
$\frac{1}{2} B = 18^\circ\ 26'\ 0''$
$B = 36.\ 52.\ 0.$

Achter Fall.

Gegeben.	*Geſucht.*
c, a oder ein Perpendikel und die Hypotenuſe.	C oder der dem gegebenen Perpendikel gegenüberſtehende Winkel.

Formel und logarithmiſche Gleichung.

$$1)\ \text{Sin}\ C = \frac{c}{a}$$

$$\log \text{Sin}\ C = 10 + \log c - \log a$$

Wenn der Winkel C groſs iſt:

$$2)\ \text{Sin}\ (45^\circ - \tfrac{1}{2} C) = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}$$

$$\log \text{Sin}\ (45^\circ - \tfrac{1}{2} C) = \frac{20 + \log(a-c) - \log 2 - \log a}{2}$$

oder: 3) $\text{Tang}\,(45^\circ - \frac{1}{2}C) = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$

$$\log \text{Tang}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}C) = \frac{20 + \log(a-c) - \log(a+c)}{2}$$

Neunter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, a oder ein Perpendikel und die Hypotenuse.	b oder das andere Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

1) $b = \sqrt{(a-c)\,(a+c)}$

$$\log b = \frac{\log(a-c) + \log(a+c)}{2}$$

Oder auch:

2) $\text{Cosin}\,x = \frac{c}{a}$

$b = a.\ \text{Sin}\,x;$

$\log \text{Cosin}\,x = 10 + \log c - \log a$

$\log b = \log a + \log \text{Sin}\,x - 10.$

Zehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, b oder die beyden Perpendikel.	C oder der dem Perpendikel c gegenüberstehende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$\text{Cotang}\,C = \frac{b}{c}$

$\log \text{Cotang}\,C = 10 + \log b - \log c$

Eilfter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, b oder die beyden Perpendikel.	B oder der dem Perpendikel b gegenüberstehende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang B} = \frac{b}{c}$$

$$\log \text{Tang B} = 10 + \log b - \log c.$$

Zwölfter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, b d. i. die beyden Perpendikel.	a oder die Hypotenuse.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$1)\ a = c.\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)}$$

$$\log a = \log c + \frac{\log\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)}{2}$$

Oder auch:

$$2)\ \text{Tang}\, x = \frac{b}{c};$$

$$a = \frac{c}{\text{Cosin } x}.$$

$$\log \text{Tang}\, x = 10 + \log b - \log c$$

$$\log a = 10 + \log c - \log \text{Cosin } x$$

Beyspiel.

c = 64 Ruthen; b = 47,994 R.

Rechnung nach Formel 1.

$$b^2 = 2303{,}42$$
$$c^2 = 4096$$
$$\log b^2 = 3{,}3623732$$
$$\log c^2 = 3{,}6123599$$

$$\log b^2 - \log c^2 = \log \frac{b^2}{c^2} = 9{,}7500133 - 10$$
$$\frac{b^2}{c^2} = 0{,}56236$$
$$1 = 1{,}00000$$

$$1 + \frac{b^2}{c^2} = 1{,}56236$$
$$\log\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) = 0{,}1937811$$
$$\text{Hälfte} = 0{,}0968905$$
$$+ \log c = 1{,}8061800$$

$$\log a = 1{,}9030705$$
$$a = 79{,}9964 \text{ R.}$$

Rechnung nach Formel 2.

$$10 + \log b = 11{,}6811902$$
$$- \log c = 1{,}8061800$$

$$\log \text{Tang } x = 9{,}8750102$$
$$x = 36^\circ\ 52'\ 0''$$
$$10 + \log c = 11{,}8061800$$
$$- \log \text{Cos } x = 9{,}9031084$$

$$\log a = 1{,}9030716$$
$$a = 79{,}9966 \text{ R.}$$

Dreyzehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
a — c und B d. i. die Differenz der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.	b d. i. das dem gegebenen Winkel gegenüberstehende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a - c) . \quad \text{Cotang} \tfrac{1}{2} B$$
$$\log b = \log (a - c) + \log \text{Cotang} \tfrac{1}{2} B - 10$$

Vierzehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
a — c und C d. i. die Differenz der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem letztern gegenüberstehenden Winkel.	b d. i. das dem gegebenen Winkel anliegende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a - c) . \quad \text{Cotang} (45^\circ - \tfrac{1}{2} C)$$
$$\log b = \log (a - c) + \log \text{Cotang} (45^\circ - \tfrac{1}{2} C) - 10$$

Funfzehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
a + c und B d. i. die Summe der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.	b d. i. das dem gegebenen Winkel gegenüberstehende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a + c) . \quad \text{Tang} \tfrac{1}{2} B$$
$$\log b = \log (a + c) + \log \text{Tang} \tfrac{1}{2} B - 10$$

Sechzehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
a+c und C d. i. die Summe der Hypotenuse und eines Perpendikels, nebst dem letzterem gegenüberstehenden Winkel.	b d. i. das dem gegebenen Winkel anliegende Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = (a+c) . \text{ Tang } (45^\circ - \tfrac{1}{2} C)$$
$$\log b = \log (a+c) + \log \text{Tang } (45^\circ - \tfrac{1}{2} C) - 10$$

Siebzehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c−b und B d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel und ein Winkel $< 45^\circ$.	c+b d. i. die Summe der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c+b = (c-b) . \text{ Cotang } (45^\circ - B)$$
$$\log (c+b) = \log (c-b) + \log \text{Cotang } (45^\circ - B) - 10$$

Achtzehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
b−c und B d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel und ein Winkel $> 45^\circ$.	b+c d. i. die Summe der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b+c = (b-c) . \text{ Cotang } (B - 45^\circ)$$
$$\log (b+c) = \log (b-c) + \log \text{Cotang } (B - 45^\circ) - 10$$

Neunzehnter Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c+b und B d. i. die Summe der beyden Perpendikel und ein Winkel $< 45^\circ$.	c—b d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c - b = (c+b) \,.\; \text{Tang}\,(45^\circ - B)$$
$$\log\,(c-b) = \log\,(c+b) + \log \text{Tang}\,(45^\circ - B) - 10$$

Zwanzigster Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
b+c und B d. i. die Summe der beyden Perpendikel und ein Winkel $> 45^\circ$.	b—c d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b - c = (b+c).\; \text{Tang}\,(B - 45^\circ)$$
$$\log\,(b-c) = \log\,(b+c) + \log \text{Tang}\,(B - 45^\circ) - 10$$

Ein und zwanzigster Fall.

Gegeben.	*Gesucht.*
c—b und a d. i. der Unterschied der beyden Perpendikel, nebst der Hypotenuse.	B und C d. i. die beyden spitzigen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Sin}\,(45^\circ - B) = \frac{c-b}{a.\sqrt{2}}$$
$$C = 90^\circ - B$$
$$\log \text{Sin}\,(45^\circ - B) = 10 + \log\,(c-b) - \log a - \frac{\log 2}{2}$$

Zwey und zwanzigſter Fall.

Gegeben.	*Geſucht.*
c+b und a d. i. die Summe der beyden Perpendikel, nebſt der Hypotenuſe.	B und C d. i. die beyden ſpitzigen Winkel.

Formel und logarithmiſche Gleichung.

$$1)\ \text{Cosin}\,(45^\circ - B) = \frac{c+b}{a.\sqrt{2}}$$

$$C = 90^\circ - B.$$

$$\log \text{Cosin}\,(45^\circ - B) = 10 + \log (c+b) - \log a - \frac{\log 2}{2}$$

Wenn B nahe an 45° beträgt:

$$2)\ \text{Sin}\,(45^\circ - B) = \sqrt{\frac{2.\,a^2 - (c+b)^2}{2.\,a^2}}$$

$$C = 90^\circ - B.$$

$$\log \text{Sin}\,(45^\circ - B) = \frac{20 + \log (2\,a^2 - (c+b)^2) - \log 2 - 2 \log a}{2}$$

Beyſpiel.

c+b = 111,994 Ruthen; a = 79.997 R.

Rechnung nach Formel 1.

10 + log (c+b)	=	12,0491948
— log a	=	1,9030716
Reſt	=	10,1461232
$-\frac{\log 2}{2}$	=	0,1505150
log Cos (45° — B)	=	9,9956082
45° — B	=	8° 8′ 4″
45°	=	44. 59. 60.
B	=	36. 51. 56.
90°	=	89. 59. 60.
C	=	53. 8. 4.

Rechnung nach Formel 2.

a^2	=	6399,520009
$2a^2$	=	12799,040018
$(c+b)^2$	=	12542,656036
$2a^2-(c+b)^2=$		256,383982
20 + log 256,384	=	22,4088909
— log 2	=	0,3010300
Reſt 1	=	22,1078609
— 2. log a	=	3,8061432
Reſt 2	=	18,3017177
Hälfte = logSin (45°—B)	=	9,1508588
45°—B	=	8° 8′ 12″
45°	=	44. 59. 60.
B	=	36. 51. 48.
90°	=	89. 59. 60.
C	=	53. 8. 12.

Drey und zwanzigſter Fall.

Gegeben.	*Geſucht.*
a+c und b d. i. die Summe der Hypotenuſe und eines Perpendikels, nebſt dem andern Perpendikel.	B und C oder die beyden ſpitzigen Winkel.

Formel und logarithmiſche Gleichung.

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} B = \frac{b}{a+c}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$\log \text{Tang } \tfrac{1}{2} B = 10 + \log b - \log (a+c)$$

Vier und zwanzigſter Fall.

Gegeben.	*Geſucht.*
a—c und b d. i. die Differenz der Hypotenuſe und eines Perpendikels, nebſt dem andern Perpendikel.	B und C d. i. die beyden ſpitzigen Winkel.

Formel und logarithmiſche Gleichung.

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} B = \frac{a-c}{b}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$\log \text{Tang } \tfrac{1}{2} B = 10 + \log (a-c) - \log b$$

Tafel
für die Auflösung
gleichschenklichter
geradlinichter Dreiecke.

Man sehe Tafel I.
Fig. II.

$$a = c$$
$$A = C$$
$$A = 90^\circ - \tfrac{1}{2} B; \qquad B = 180^\circ - 2 A.$$

Fall 1.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.	A d. i. Winkel an der Grundlinie.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cosin } A = \frac{b}{2\,a}$$

$$\log \text{Cosin } A = 10 + \log b - \log 2 - \log a$$

Fall 2.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.	B d. i. Winkel an der Spitze.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} B = \frac{b}{2\,a}$$

$$\log \text{Sin } \tfrac{1}{2} B = 10 + \log b - \log 2 - \log a$$

Fall 3.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, A d. i. Schenkel und Winkel an der Grundlinie.	b d. i. Grundlinie.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = 2\,a \,.\, \text{Cosin } A$$

$$\log b = \log 2 + \log a + \log \text{Cosin } A - 10$$

Fall 4.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, B d. i. Schenkel und Winkel an der Spitze.	b d. i. Grundlinie.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = 2\,a\,.\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,B$$

$$\log b = \log 2 + \log a + \log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,B - 10$$

Fall 5.

Gegeben.	*Gesucht*
b, A d. i. Grundlinie und Winkel an der Grundlinie.	a d. i. Schenkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{b}{2\ \mathrm{Cosin}\ A}$$

$$\log a = 10 + \log b - \log 2 - \log \mathrm{Cosin}\ A$$

Fall 6.

Gegeben.	*Gesucht.*
b, B d. i. Grundlinie und Winkel an der Spitze.	a d. i. Schenkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$a = \frac{b}{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,B}$$

$$\log a = 10 + \log b - \log 2 - \log \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,B$$

Auflösung schiefwinklichter geradlinichter Dreiecke.

Man sehe Tafel I.
Fig. III.

AB = c;   AC = b;   BC = a.

Fall 1.

Gegeben.	*Gesucht.*
A, B, C, a d. i. die Winkel und eine Seite.	b, c d. i. die beyden übrigen Seiten.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$b = \frac{a . \text{Sin } B}{\text{Sin } A}; \qquad c = \frac{a . \text{Sin } C}{\text{Sin } A}$$

$$\log b = \log a + \log \text{Sin } B - \log \text{Sin } A$$
$$\log c = \log a + \log \text{Sin } C - \log \text{Sin } A$$

Fall 2.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, b, A, d. i. zwey Seiten und ein gegenüberstehender Winkel.	B, C d. i. die beyden übrigen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Sin } B = \frac{b . \text{Sin } A}{a}; \qquad C = 180° - A - B$$

$$\log \text{Sin } B = \log b + \log \text{Sin } A - \log a .$$

B ist $< 90°$ wenn $b < a$; da hebt sich also die Zweydeutigkeit.

Ist $b > a$, so entscheidet die Trigonometrie über die Beschaffenheit von B nichts.

Fall 3.

Gegeben.

a, b, A d. i. zwey Seiten u. ein gegenüberſtehender Winkel.

Geſucht.

c d. i. die dritte Seite.

Erſte Auflöſungsart.

$$\sin B = \frac{b \,.\, \sin A}{a}\,; \qquad c = \frac{a \,.\, \sin (A+B)}{\sin A}$$

Wenn b $<$ a, ſo iſt B $<$ 90° oder ſpitzig.

Wenn aber b $>$ a iſt, ſo entſcheidet die Trig nometrie über die Beſchaffenheit von B nicht und es iſt B entweder ſpitzig oder ſtumpf, a dann bekömmt auch c zweyerley Werthe.

Zweyte Auflöſungsart.

I. $c = b \,.\, \cos A + \sqrt{(a + b \,.\, \sin A)(a - b \,.\, \sin A)}$
Für A, B ſpitzig, und für A ſtumpf, B ſpitzi

II. $c = b \,.\, \cos A - \sqrt{(a + b \,.\, \sin A)(a - b \,.\, \sin A)}$
Für A ſpitzig, B ſtumpf.

Es gilt wenn a $>$ b iſt, allezeit die Formel I, un da giebt es keine Unbeſtimmtheit für c; iſt ein ſtumpfer Winkel, ſo wird das Gli b . Cos A negativ.

Wenn aber a $<$ b, ſo iſt auch A $<$ B, folglic kann, indem A ſpitzig iſt, der Winkel entweder ſpitzig oder ſtumpf ſeyn, und giebt eine Zweydeutigkeit für c, die ſi durch die Trigonometrie allein nicht au machen läſst.

Beyſpiel.

$a = 104$ R. $< b = 142$ R.; $A = 44^\circ\ 13'\ 2''$.

Rechnung nach der 1ſten Auflöſungsart.

log b	=	2,1522883
+ log Sin A	=	9,8434698
Summe	=	11,9957581
— log a	=	2,0170333
log Sin B	=	9,9787248
B ſpitzig	=	72° 12′ 43″
180°	=	179. 59. 60.
B ſtumpf	=	107. 47. 17.
A	=	44. 13. 2.
A + B ſtumpf	=	152. 0. 19.
log a	=	2,0170333
+ log Sin (A + B ſtu.)	=	9,6715340
Summe	=	11,6885673
— log Sin A	=	9,8434698
log c	=	1,8450975
c	=	70,000 Ruthen. *Zweyter Werth für* c.

A	=	44° 13′ 2″
B ſpitzig	=	72. 12. 43.
A + B ſpitzig	=	116. 25. 45.
log a	=	2,0170333
+ log Sin (A + B ſp.)	=	9,9520585
Summe	=	11,9690918
— log Sin A	=	9,8434698
log c	=	2,1256220
c	=	133,543 Ruthen. *Erſter Werth für* c.

Rechnung nach der 2ten Auflösungsart.

$$\log b = 2{,}1522883$$
$$+\log \frac{\text{Sin } A}{\text{Sin tot}} = 9{,}8434698 - 10$$

$$\log 99{,}028 = 1{,}9957581$$
$$b \,.\, \text{Sin } A = 99{,}028$$
$$a = 104{,}000$$

$$a + b \text{ Sin } A = 203{,}028$$
$$a - b \text{ Sin } A = 4{,}972$$
$$\log (a + b \text{ Sin } A) = 2{,}3075559$$
$$+\log (a - b \text{ Sin } A) = 0{,}6965311$$

$$\text{Summe} = 3{,}0040870$$
$$\text{Hälfte} = \log 31{,}772 = 1{,}5020435$$
$$\sqrt{(a + b \text{ Sin } A)(a - b \text{ Sin } A)} = 31{,}772 \text{ R.}$$

$$\log b = 2{,}1522883$$
$$+\log \frac{\text{Cos } A}{\text{Sin tot}} = 9{,}8553380 - 10$$

$$\log 101{,}772 = 2{,}0076263$$
$$b \,.\, \text{Cos } A = 101{,}772 \text{ R.}$$
$$\sqrt{(a + b \text{ Sin } A)(a - b \text{ Sin } A)} = 31{,}772$$

Summe $= c = 133{,}544$. *Erster Werth für* c.

Unterschied $= c = 70{,}000$. *Zweyter Werth für* c.

Fall 4.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, b, a > b, C d. i. zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel.	c d. i. die dritte Seite.

Erste Auflösung und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang } x = \frac{2 \,.\, \text{Sin} \tfrac{1}{2} C \; \sqrt{(a\,b)}}{a - b};$$

$$c = \frac{a - b}{\text{Cosin } x}$$

$$\log \text{Tang } x = \frac{\log a + \log b}{2} + \log 2 + \log \text{Sin} \tfrac{1}{2} C - \log (a - b);$$

$$\log c = 10 + \log (a - b) - \log \text{Cosin } x$$

Zweyte Auflösung.

1) $c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,ab \text{ Cosin } C)}$ Für $C < 90°$

2) $c = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab \text{ Sin}(C - 90°))}$ Für $C > 90°$

Beyspiel.

$a = 142$ R.; $b = 104$ R.; $C = 27° 59' 41''$.

Rechnung nach der ersten Auflösung.

log a =	2,1522883
+ log b =	2,0170333
Summe =	4,1693216
Hälfte =	2,0846608
+ log 2 =	0,3010300
+ log Sin ½ C =	9,3835949
Summe =	11,7692857
— log (a — b) =	1,5797836
log Tang x =	10,1895021
x =	57° 7′ 18″
10 + log (a — b) =	11,5797836
— log Cosin x =	9,7346854
log c =	1,8450982
c =	70,000 R.

Rechnung nach der zweyten Auflösung.

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$+ \log a = 2,1522883$$
$$+ \log b = 2,0170333$$
$$+ \log \frac{\text{Cosin } C}{\text{Sin tot}} = 9,9459562 - 10$$

$$\text{Summe} = \log 26080 = 4,4163078$$
$$2\, a b \text{ Cosin } C = 26080$$
$$a^2 = 20164$$
$$b^2 = 10816$$

$$a^2 + b^2 = 30980$$
$$- 2\, a b \text{ Cosin } C = 26080$$

$$a^2 + b^2 - 2\, a b \text{ Cosin } C = 4900$$
$$c = 70 \text{ R.}$$

Fall 5.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, b, a > b, C, d. i. zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel.	A, B d. i. die beyden übrigen Winkel.

Erste Auflösungsart.

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\text{Cot } \tfrac{1}{2} C \,.\, (a - b)}{a + b};$$
$$\tfrac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C;$$
$$\tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B) = A;$$
$$\tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B) = B.$$

Zweyte Auflösungsart.

$$\text{Tang } x = \frac{b}{a};$$
$$\text{Cotang } \tfrac{1}{2}(A - B) = \text{Tang } \tfrac{1}{2} C \,.\, \text{Tang}(45^\circ + x);$$
$$\tfrac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C;$$
$$\tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B) = A;$$
$$\tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B) = B.$$

Dritte Auflösungsart.

I. $$\text{Tang } A = \frac{\text{Tang } C}{\dfrac{b}{a \,.\, \text{Cosin } C} - 1}$$

Wenn $C < 90^\circ$
und $a \,.\, \text{Cosin } C < b$.

II. $$\text{Tang } (A - 90^\circ) = \frac{1 - \dfrac{b}{a \,.\, \text{Cosin } C}}{\text{Tang } C}$$

Wenn $C < 90^\circ$
und $a \,.\, \text{Cosin } C > b$.

III. $$\text{Tang } A = \frac{\text{Cotang } (C - 90^\circ)}{\dfrac{b}{a \,.\, \text{Sin } (C - 90^\circ)} + 1}$$

Wenn $C > 90^\circ$.

IV. $B = 180^\circ - A - C$.

Beyspiel.

a = 142 Ruthen; b = 104 R.; C = 27° 59′ 41″.

Rechnung nach der 1sten Auflösungsart.

$$\log \text{Cot} \tfrac{1}{2} C = 10{,}6033141$$
$$+ \log (a - b) = 1{,}5797836$$
$$\text{Summe} = 12{,}1830977$$
$$- \log (a + b) = 2{,}3909351$$
$$\log \text{Tang} \tfrac{1}{2} (A - B) = 9{,}7921626$$
$$\tfrac{1}{2} (A - B) = 31° \; 47′ \; 7{,}36″$$
$$90° = 89. \; 59. \; 60{,}00$$
$$\tfrac{1}{2} C = 13. \; 59. \; 50{,}50$$
$$\tfrac{1}{2} (A + B) = 76. \; 0. \; 9{,}50.$$
$$A = 107. \; 47. \; 17.$$
$$B = 44. \; 13. \; 2.$$

Rechnung nach der 2ten Auflösungsart.

$$10 + \log b = 12{,}0170333$$
$$- \log a = 2{,}1522883$$
$$\log \text{Tang}\, x = 9{,}8647450$$
$$x = 36° \; 13′ \; 8″$$
$$45° = 45. \; 0. \; 0.$$
$$45° + x = 81. \; 13. \; 8.$$
$$\log \text{Tang} \tfrac{1}{2} C = 9{,}3966859$$
$$+ \log \frac{\text{Tang}\,(45° + x)}{\text{Sin Tot}} = 10{,}8111541 - 10$$
$$\log \text{Cot} \tfrac{1}{2} (A - B) = 10{,}2078400$$
$$\tfrac{1}{2} (A - B) = 31° \; 47′ \; 7″$$
$$\tfrac{1}{2} (A + B) = 76. \; 0. \; 9{,}5.$$
$$\text{Summe} = A = 107. \; 47. \; 17.$$
$$\text{Unterschied} = B = 44. \; 13. \; 2.$$

Rechnung nach der 3ten Auflösungsart.

$$\log a = 2{,}1522883$$

$$+\log\frac{\text{Cosin } C}{\text{Sin tot}} = 9{,}9459562 - 10$$

$$\log(a.\text{Cosin } C) = 2{,}0982445$$

$$\log b = 2{,}0170333$$

$$\left.\right\} a.\text{Cosin } C > b$$

$$\log\frac{b}{a.\text{Cosin } C} = 9{,}9187888 - 10$$

$$\frac{b}{a.\text{Cosin } C} = 0{,}829447$$

$$1 = 1{,}000000$$

$$1 - \frac{b}{a.\text{Cosin } C} = 0{,}170553$$

$$20 + \log\left(1 - \frac{b}{a.\text{Cosin } C}\right) = 29{,}2318594 - 10$$

$$-\log \text{Tang } C = 9{,}7255778$$

$$\log \text{Tang } (A - 90^\circ) = 9{,}5062816$$

$$A - 90^\circ = 17^\circ\ 47'\ 17''$$

$$A = 107.\ 47.\ 17.$$

$$180^\circ = 179.\ 59.\ 60.$$

$$180^\circ - A = 72.\ 12.\ 43.$$

$$C = 27.\ 59.\ 41.$$

$$180^\circ - A - C = B = 44.\ 13.\ 2.$$

Fall 6.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, b, c d. i. die drey Seiten.	A, B, C oder die Winkel.

Formel I. und logarithmische Gleichung.

$$S = \frac{a + b + c}{2};$$

$$\text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{S\,.\,(S - a)}{b\,c}\right)}$$

$$\log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{20 + \log S + \log(S - a) - \log b - \log c}{2}$$

Formel II. und logarithmische Gleichung.

$$S = \frac{a + b + c}{2};$$

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{(S - b)\,(S - c)}{b\,c}\right)}$$

$$\log\ \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{20 + \log(S - b) + \log(S - c) - \log b - \log c}{2}$$

Formel III. und logarithmische Gleichung.

$$Q = \sqrt{(a + b + c)\,(b + c - a)\,(a + c - b)\,(a + b - c)}$$

$$\text{Sin}\,A = \frac{Q}{2\,b\,c}$$

$$\log Q = \frac{20 + \log(a + b + c) + \log(b + c - a) + \log(a + c - b) + \log(a + b - c)}{2}$$

$$\log\ \text{Sin}\ A = \log Q - \log 2 - \log b - \log c\,.$$

Formel IV. und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cosin}\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\log \text{Cosin}\,A = 10 + \log(b^2 + c^2 - a^2) - \log 2 - \log b - \log c.$$

Formel V. und logarithmische Gleichung.

$$R = \frac{(a+b+c)\ (b+c-a)}{2bc};$$

$$\text{Cosin } A = R - 1.$$

$$\log R = \log(a+b+c) + \log(b+c-a) - \log 2 - \log b - \log c;$$

$$\log \text{Cosin } A = 10 + \log(R-1).$$

Beyspiel.

a = 142 Ruthen; b = 104 R.; c = 70 R.

Rechnung nach Formel I.

a =	142 R.
b =	104.
c =	70.
a + b + c =	316.
Hälfte = S =	158.
a =	142.
S — a =	16.
20 + log S =	22,1986571
+ log (S — a) =	1,2041200
Summe =	23,4027771
— log b =	2,0170333
Reſt 1 =	21,3857438
— log c =	1,8450980
Reſt 2 =	19,5406458
Hälfte = log Cosin ½ A =	9,7703229
½ A =	53° 53′ 38,241″.
A =	107. 47. 17″

Rechnung nach Formel II.

$S = 158$ R.; $S = 158$ R.
$b = 104$. $c = 70$.

$S - b = 54$; $S - c = 88$.

$20 + \log(S - b) =$	21,7323938
$+ \log(S - c) =$	1,9444827
Summe $=$	23,6768765
$- \log b =$	2,0170333
Reſt 1 $=$	21,6598432
$- \log c =$	1,8450980
Reſt 2 $=$	19,8147452
Hälfte $= \log \sin \frac{1}{2} A =$	9,9073726
$\frac{1}{2} A =$	$53^\circ\ 53'\ 38,3125''$
$A =$	107. 47. 17.

Rechnung nach Formel III.

$a + b + c =$	316 R.
$b + c - a =$	32.
$a + c - b =$	108.
$a + b - c =$	176.
$20 + \log(a + b + c) =$	22,4996871
$+ \log(b + c - a) =$	1,5051500
$+ \log(a + c - b) =$	2,0334238
$+ \log(a + b - c) =$	2,2455127
Summe $=$	28,2837736
Hälfte $= \log Q =$	14,1418868
$- \log 2 =$	0,3010300
$\log Q - \log 2 =$	13,8408568
$- \log b =$	2,0170333
Reſt $=$	11,8238235
$- \log c =$	1,8450980
$\log \sin A =$	9 9787255
$A =$	$107^\circ\ 47'\ 17''$

Rechnung nach Formel IV.

$$b^2 = 10816$$
$$c^2 = 4900$$

$$b^2 + c^2 = 15716$$
$$-\ a^2 = 20164$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = -\ 4448$$
$$10 + \log 4448 = 13,6481648$$
$$-\ \log 2 = 0,3010300$$

$$\text{Reſt } 1 = 13,3471348$$
$$-\ \log b = 2,0170333$$

$$\text{Reſt } 2 = 11,3301015$$
$$-\ \log c = 1,8450980$$

$$\log - \text{Cosin } A = 9,4850035$$
$$A = 107^\circ\ 47'\ 17''$$

Rechnung nach Formel V.

$$a + b + c = 316 \text{ R.}$$
$$b + c - a = 32.$$
$$\log (a + b + c) = 2,4996871$$
$$+ \log (b + c - a) = 1,5051500$$

$$\text{Summe} = 4,0048371$$
$$-\ \log 2 = 0,3010300$$

$$\text{Reſt } 1 = 3,7038071$$
$$-\ \log b = 2,0170333$$

$$\text{Reſt } 2 = 1,6867738$$
$$-\ \log c = 1,8450980$$

$$\log R = 9,8416758 - 10$$
$$R = 0,6945055$$
$$1 = 1,0000000$$

$$R - 1 = -\ 0,3054945$$
$$10 + \log 0,305495 = 19,4850041 - 10$$
$$\log - \text{Cosin } A = 9,4850041$$
$$A = 107^\circ\ 47'\ 17''.$$

Fall 7.

Gegeben.	*Gesucht.*
c, b, C — B; c > b d. i. zwey Seiten und die Differenz der ihnen gegenüberstehenden Winkel.	A d. i. der von den beyden gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,A = \frac{(c-b)\,.\,\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,(C-B)}{c+b}$$

$$\log \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}A = \log(c-b) + \log \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}(C-B) - \log(c+b)$$

Beyspiel.

$c = 104$ R.; $b = 70$ R.; $C - B = 16^\circ\ 13'\ 21''$

Rechnung.

$$\begin{array}{rcl} \log(c-b) = \log 34\ \text{R.} & = & 1{,}5314789 \\ +\log \text{Cotang}\ \tfrac{1}{2}\ (C-B) & = & 10{,}8461199 \\ \hline \text{Summe} & = & 12{,}3775988 \\ -\log(c+b) = \log 174\ \text{R.} & = & 2{,}2405492 \\ \hline \log \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}\ A & = & 10{,}1370496 \\ \tfrac{1}{2}\ A & = & 53^\circ\ 53'\ 38{,}227'' \\ A & = & 107.\ 47.\ 17. \end{array}$$

Fall 8.

Gegeben.	*Gesucht.*
C, B, c+b; C > B d. i. alle drey Winkel und die Summe zweyer Seiten.	c, b d. i. die beyden Seiten deren Summe gegeben ist.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$c - b = (c+b)\,.\,\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,(C+B)\,.\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(C-B)$$

$$\tfrac{1}{2}\,(c+b) + \tfrac{1}{2}\,(c-b) = c$$

$$\tfrac{1}{2}\,(c+b) - \tfrac{1}{2}\,(c-b) = b$$

$$\log(c-b) = \log(c+b) + \log \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}(C+B) + \log \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(C-B) - 2^{0}$$

Beyspiel.

$C = 44^\circ\ 13'\ 2''$; $B = 27^\circ\ 59'\ 41''$; $c + b = 174$ R.

Rechnung.

$C + B = 72^\circ\ 12'\ 43''$	$C - B = 16^\circ\ 13'\ 21''$
Hälfte $= 36.\ 6.\ 21,5.$	Hälfte $= 8.\ 6.\ 40,5.$

$$\log(c+b) = 2,2405492$$
$$+ \log \text{Cotang}\ \tfrac{1}{2}(C+B) = 10,1370508$$
$$+ \log \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}(C-B) - 20 = 9,1538801 - 20$$

$$\log(c-b) = 1,5314801$$
$$c - b = 34 \text{ R.}$$
$$\tfrac{1}{2}(c+b) = 87.$$
$$\tfrac{1}{2}(c-b) = 17.$$

$$\text{Summe} = c = 104.$$
$$\text{Unterſchied} = b = 70.$$

Fall 9.

Gegeben.	*Geſucht.*
$C,\ B,\ c - b$; $C > B$ d. i. alle drey Winkel und der Unterſchied zweyer Seiten.	$c,\ b$ d. i. die beyden Seiten deren Unterſchied gegeben iſt.

Formel und logarithmiſche Gleichung.

$$c + b = (c - b) \cdot \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}(C+B) \cdot \text{Cotang}\ \tfrac{1}{2}(C-B)$$
$$\tfrac{1}{2}(c+b) + \tfrac{1}{2}(c-b) = c$$
$$\tfrac{1}{2}(c+b) - \tfrac{1}{2}(c-b) = b$$
$$\log(c+b) = \log(c-b) + \log \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}(C+B) + \log \text{Cotang}\ \tfrac{1}{2}(C-B) - 20$$

Fall 10.

Gegeben.	*Gesucht.*
A, a, c+b; c > b d. i. ein Winkel, die ihm gegenüberstehende Seite, und die Summe der beyden übrigen Seiten.	C, B d. i. die beyden übrigen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{(c+b)\,.\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A}{a}$$

$$\tfrac{1}{2}(C+B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}A$$

$$\tfrac{1}{2}(C+B) + \tfrac{1}{2}(C-B) = C$$

$$\tfrac{1}{2}(C+B) - \tfrac{1}{2}(C-B) = B$$

$$\log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}(C-B) = \log(c+b) + \log \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A - \log a$$

Beyspiel.

$A = 107^\circ\ 47'\ 17''$; $a = 142$ R.; $c+b = 174$ R.

Rechnung.

$\log(c+b) =$	2,2405492
$+\log \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A =$	9,9073729
Summe =	12,1479221
$-\log a =$	2,1522883
$\log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}(C-B) =$	9,9956338
$\tfrac{1}{2}(C-B) =$	8° 6′ 39,33″
$\tfrac{1}{2}(C+B) =$	36. 6. 21,5.
Summe = C =	44. 13. 0,83
Unterschied = B =	27. 59. 42,17

Fall 11.

Gegeben.	*Gesucht.*
A, a, c — b; c > b d. i. ein Winkel, die ihm gegenüberstehende Seite, und der Unterschied der beyden übrigen Seiten.	C, B d. i. die beyden übrigen Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(C-B) = \frac{(c-b)\,.\ \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\,A}{a}$$

$$\tfrac{1}{2}\,(C+B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,A$$

$$\tfrac{1}{2}\,(C+B) + \tfrac{1}{2}\,(C-B) = C$$

$$\tfrac{1}{2}\,(C+B) - \tfrac{1}{2}\,(C-B) = B$$

$$\log \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(C-B) = \log(c-b) + \log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\,A - \log a.$$

Fall 12.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, B, c+b d. i. eine Seite, einer von den beyden anliegenden Winkeln, und die Summe der beyden übrigen Seiten.	C d. i. der andere der gegebenen Seite anliegende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{((c+b)+a)\,.\ \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,B}{(c+b)-a}$$

$$\log \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}C = \log((c+b)+a) + \log \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,B - \log((c+b)-a).$$

Beyspiel 1.

a = 142 R.; B = 27° 59′ 41″; c + b = 174 R.

Rechnung.

c + b = 174 R.	log ((c + b) + a) = 2,4996871
± a = 142.	+ log Tang ½ B = 9,3966859
Summe = 316.	Summe = 11,8963730
Unterſchied = 32.	— log ((c + b) — a) = 1,5051500
B = 27° 59′ 41″	log Cotang ½ C = 10,3912230
½ B = 13. 59. 50,5	½ C = 22° 6′ 31,3″
	C = 44. 13. 2,6.

Beyspiel 2.

a = 142 R.; B = 44° 13′ 2″; c + b = 174 R.

Rechnung.

log ((c + b) + a) = 2,4996871
+ log Tang ½ B = 9,6087752

Summe = 12,1084623
— log ((c + b) — a) = 1,5051500

log Cotang ½ C = 10,6033123
½ C = 13° 59′ 50,7″
C = 27. 59. 41,4.

Fall. 13.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, B, c—b; C > B d. i. eine Seite, der *kleinere* anliegende Winkel, und der Unterschied der beyden übrigen Seiten.	C d. i. der grössere der gegebenen Seite anliegende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{(a+(c-b))\,.\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,B}{a-(c-b)}$$

$$\log\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}C = \log(a+(c-b)) + \log\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}B - \log(a-(c-b))$$

Beyspiel.

a = 142 R.; B = 27° 59′ 41″; c—b = 34 R.

Rechnung.

a =	142 R.	log (a + (c—b)) =	2,2455127
c—b =	34.	+ log Tang ½ B =	9,3966859
Summe =	176.	Summe =	11,6421986
Unterſch. =	108.	— log (a — (c — b)) =	2,0334238
½ B =	13° 59′ 50,5″	log Tang ½ C =	9,6087748
		½ C =	22° 6′ 31″
		C =	44. 13. 2.

Fall 14.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, C, c—b; C > B d. i. eine Seite, der *größere* anliegende Winkel, und der Unterschied der beyden übrigen Seiten.	B d. i. der kleinere der gegebenen Seite anliegende Winkel.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{(a-(c-b))\,.\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,C}{a+(c-b)}$$

$$\log\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}B = \log(a-(c-b)) + \log\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}C - \log(a+(c-b))$$

Beyspiel.

$a = 142$ R.; $C = 44^\circ\ 13'\ 2''$; $c - b = 34$ R.

Rechnung.

log (a—(c—b))	=	2,0334238
+ log Tang ½ C	=	9,6087752
Summe	=	11,6421990
—log (a+(c—b))	=	2,2455127
log Tang ½ B	=	9,3966863
½ B	=	13° 59′ 50,5″
B	=	27. 59. 41.

Formeln
zur Berechnung des Innhalts geradlinichter Dreiecke.

Man sehe Tafel I.
Fig. III.

AB = c; AC = b; BC = a.

Fall I.

Gegeben.	*Gesucht.*
A, B, C d. i. die Winkel a und eine Seite.	T d. i. des Dreiecks Innhalt.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$T = \frac{a^2 \,.\, \text{Sin}\,B \,.\, \text{Sin}\,C}{2 \,.\, \text{Sin}\,A}$$

$$\log T = \log a + \log a + \log \text{Sin}\,B + \log \text{Sin}\,C - \log 2 - \log \text{Sin}\,A - 10$$

Beyspiel.

$A = 107^\circ\, 47'\, 17''$; $B = 44^\circ\, 13'\, 2''$; $C = 27^\circ\, 59'\, 41''$
$a = 142$ R.

Rechnung.

log a	=	2,1522883
+ log a	=	2,1522883
+ log Sin B	=	9,8434698
+ log Sin C	=	9,6715340
Summe	=	23,8195804
— log 2	=	0,3010300
Rest	=	23,5185504
— log Sin A — 10	=	9,9787250 — 10
log T	=	3,5398254
T	=	3465,975 □ R.

Fall II.

Gegeben.	*Gesucht.*
a, b, d. i. zwey Seiten und A ein gegenüberstehender Winkel.	T d. i. der Innhalt des Dreiecks.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$\text{Sin } B = \frac{b \, . \, \text{Sin } A}{a} \begin{cases} B < 90^\circ, \text{ wenn } b < a; \\ B \text{ zweydeutig, wenn } b \geq a. \end{cases}$$

$$T = \frac{a \, . \, b \, . \, \text{Sin }(A+B)}{2}$$

$$\log \text{Sin } B = \log b + \log \text{Sin } A - \log a$$

$$\log T = \log a + \log b + \log \text{Sin }(A+B) - \log 2 - 10.$$

Beyspiel.

$a = 104$ R. $< b = 142$ R.; $A = 44^\circ \; 13' \; 2''$.

Rechnung.

log b	=	2,1522883
+ log Sin A	=	9,8434698
Summe	=	11,9957581
— log a	=	2,0170333
log Sin B	=	9,9787248
B ſpitzig	=	72° 12′ 43″
180°	=	179. 59. 60.
B ſtumpf	=	107. 47. 17.
+ A	=	44. 13. 2.
A + B ſtumpf	=	152. 0. 19.
log a	=	2,0170333
+ log b	=	2,1522883
+ log Sin (A + B ſtu.)	=	9,6715340
Summe	=	13,8408556
— log 2 — 10	=	0,3010300 — 10
log T	=	3,5398256
T	=	3465,975 □R. *Zweyter Werth für T.*

$$
\begin{array}{rl}
A = & 44^\circ\ 13'\ 2'' \\
+B \text{ ſpitzig} = & 72.\ 12.\ 43. \\
\hline
A+B \text{ ſpitzig} = & 116.\ 25.\ 45. \\
\log a = & 2,0170333 \\
+\log b = & 2,1522883 \\
+\log \text{Sin}\,(A+B \text{ ſp.}) = & 9,9520585 \\
\hline
\text{Summe} = & 14,1213801 \\
-\log 2 - 10 = & 0,3010300 - 10 \\
\hline
\log T = & 3,8203501 \\
T = & 6612,26 \ \square \text{ R.}
\end{array}
$$

Erſter Werth für T

Fall III.

Gegeben.	*Geſucht.*
a b C d. i. zwey Seiten und der eingeſchloſſene Winkel.	T oder des Dreiecks Innhalt.

Formel und logarithmiſche Gleichung.

$$T = \frac{a\,.\,b\,.\,\text{Sin}\,C}{2}$$

$$\log T = \log a + \log b + \log \text{Sin}\,C - \log 2 - 10.$$

Fall IV.

Gegeben.	*Geſucht.*
a, b, c, oder die drey Seiten.	T d. i. des Dreiecks Innhalt.

Erſte Formel und logarithmiſche Gleichung.

$$S = \frac{a+b+c}{2};$$

$$T = \sqrt{(S\,.\,(S-a)\,.\,(S-b)\,.\,(S-c))}$$

$$\log T = \frac{\log S + \log(S-a) + \log(S-b) + \log(S-c)}{2}$$

Zweyte Formel und logarithmische Gleichung.

$$Q = \sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}$$

$$T = \frac{Q}{4}.$$

$$\log Q = \frac{\log(a+b+c) + \log(b+c-a) + \log(a+c-b) + \log(a+b-c)}{2}$$

$$\log T = \log Q - \log 4.$$

Beyspiel 1.

a = 142 Ruthen; b = 104 R.; c = 70 R.

Rechnung nach der ersten Formel.

$a+b+c =$	316 R.
Hälfte $= S =$	158.
$S - a =$	16.
$S - b =$	54.
$S - c =$	88.
$\log S =$	2,1986571
$+ \log(S-a) =$	1,2041200
$+ \log(S-b) =$	1,7323938
$+ \log(S-c) =$	1,9444827
Summe =	7,0796536
Hälfte $= \log T =$	3,5398268
$T =$	3465,985 □ Ruthen.

Rechnung nach der zweyten Formel.

$$a+b+c = 316 \text{ R.}$$
$$b+c-a = 32.$$
$$a+c-b = 108.$$
$$a+b-c = 176.$$

$\log(a+b+c) =$	2,4996871
$+\log(b+c-a) =$	1,5051500
$+\log(a+c-b) =$	2,0334238
$+\log(a+b-c) =$	2,2455127
Summe =	8,2837736
Hälfte = $\log Q$ =	4,1418868
$-\log 4$ =	0,6020600
$\log T$ =	3,5398268
T =	3465,985 □ R.

Beyspiel 2.

$a = 142$ R.; $b = 104$ R.; $c = 133,543$ R.

Rechnung nach der ersten Formel.

$a+b+c =$	379,543 R.
Hälfte = S =	189,7715.
$S-a$ =	47,7715.
$S-b$ =	85,7715.
$S-c$ =	56,2285.
$\log S$ =	2,2782310
$+\log(S-a)$ =	1,6791689
$+\log(S-b)$ =	1,9333430
$+\log(S-c)$ =	1,7499565
Summe =	7,6406994
Hälfte = $\log T$ =	3,8203497
T =	6612,26 □ R.

Rechnung nach der zweyten Formel.

$a+b+c =$	379,543 R.
$b+c-a =$	95,543.
$a+c-b =$	171,543.
$a+b-c =$	112,457.
$\log(a+b+c) =$	2,5792610
$+\log(b+c-a) =$	1,9801989
$+\log(a+c-b) =$	2,2343730
$+\log(a+b-c) =$	2,0509866
Summe =	8,8448195
Hälfte = $\log Q =$	4,4224097
$-\log 4 =$	0,6020600
$\log T =$	3,8203497
$T =$	6612,26 □ R.

F a l l V.

Gegeben.	*Gesucht.*
a d. i. die Seite eines gleichseitigen Dreiecks.	T d. i. des gleichseitigen Dreiecks Innhalt.

Formel und logarithmische Gleichung.

$$T = a^2 . 0,4330127$$

$$\log T = \log a + \log a + 9,6365006 - 10.$$

Formeln
zur
Auflösung rechtwinklichter Kugeldreiecke.

Tafel I.

Auflösung eines in A rechtwinklichten Kugeldreiecks A B C. *Man sehe Taf. I. Fig. IV.*

BC = a; AC = b; AB = c.

BC = a: Die Hypotenuse. AC = b, AB = c: Die beyden Perpendikel.

Gegeben.	*Gesucht.*	*Formel.*
a, B	b . .	1) $\text{Sin } b^* = \text{Sin } a \,.\, \text{Sin } B^*$
	c . .	2) $\text{Tang } c = \text{Tang } a \,.\, \text{Cos } B$
	C . .	3) $\text{Cot } C = \text{Cos } a \,.\, \text{Tang } B$
a, c	b . .	4) $\text{Cos } b = \dfrac{\text{Cos } a}{\text{Cos } c}$
	B . .	5) $\text{Cos } B = \text{Tang } c \,.\, \text{Cot } a$
	C . .	6) $\text{Sin } C^* = \dfrac{\text{Sin } c^*}{\text{Sin } a}$
c, C Zweifelhafte Fälle.	a . .	7) $\text{Sin } a = \dfrac{\text{Sin } c}{\text{Sin } C}$
	b . .	8) $\text{Sin } b = \text{Tang } c \,.\, \text{Cot } C$
	B . .	9) $\text{Sin } B = \dfrac{\text{Cos } C}{\text{Cos } c}$
c, B	a . .	10) $\text{Cot } a = \text{Cos } B \,.\, \text{Cot } c$
	b . .	11) $\text{Tang } b = \text{Tang } B \,.\, \text{Sin } c$
	C . .	12) $\text{Cos } C = \text{Sin } B \,.\, \text{Cos } c$
c, b	a . .	13) $\text{Cos } a = \text{Cos } c \,.\, \text{Cos } b$
	B . .	14) $\text{Cot } B = \text{Sin } c \,.\, \text{Cot } b$
B, C	a . .	15) $\text{Cos } a = \text{Cot } B \,.\, \text{Cot } C$
	c . .	16) $\text{Cos } c = \dfrac{\text{Cos } C}{\text{Sin } B}$

Anmerkung. Die mit einem Sternchen bezeichneten Bögen sind gleichartig. Die zweifelhaften Fälle ausgenommen, wird alles übrige durch die Zeichen der trigonometrischen Linien bestimmt.

T

welche für Tafel 1 die logarithmiſchen Gleich-

en

Gegeben.	Geſucht.
Die Hypotenuſe und ein Winkel.	Das dem gegebenen Winkel gegenüber-ſtehende Perpendikel
	Das dem gegebenen Winkel anliegende Perpendikel
	Der andere Winkel - - - -
Die Hypotenuſe und ein Perpendikel.	Das andere Perpendikel - - -
	Der dem gegebenen Perpendikel anlie-gende Winkel
	Der gegenüberſtehende Winkel -
Ein Perpendikel u. der gegenüberſtehende Winkel. *Zweydeutige Fälle.*	Die Hypotenuſe - - - - -
	Das andere Perpendikel - - - -
	Der andere Winkel - - - - -
Ein Perpendikel und der anliegende Winkel.	Die Hypotenuſe - - - - - -
	Das andere Perpendikel - - - -
	Der andere Winkel - - - - -

fel 2

gen zur Auflösung rechtwinklichter Kugeldreiecke hält.

Formel.

1) Log Sin x*
= log Sin Hypoten. + log Sin gegeb. Wink.* — 10

2) Log Tang x
= log tang Hypoten. + log Cos gegeb. Wink. — 10

3) Log Cotang x
= log Cos Hypoten. + log Tang gegeb. Wink. — 10

4) Log Cosin x
= 10 + log Cos Hypoten. — log Cos gegeb. Perpend.

5) Log Cosin x
= log tang gegeb. Perpend. + log Cot Hypoten. — 10

6) Log Sin x*
= 10 + log Sin gegeb. Perpend.* — log Sin Hypoten.

7) Log Sin x
= 10 + log Sin gegeb. Perpend. — log Sin gegeb. Winkel

8) Log Sin x
= log tang gegeb. Perpend. + log Cot gegeb. Wink. — 10

9) Log Sin x
= 10 + log Cos gegeb. Wink. — log Cos gegeb. Perpend.

10) Log Cotang x
= log Cos gegeb. Wink. + log Cot gegeb. Perp. — 10

11) Log Tang x
= log tang gegeb. Wink. + log Sin gegeb. Perp. — 10

12) Log Cosin x
= log Sin gegeb. Wink. + log Cos gegeb. Perp. — 10

Gegeben.	*Geſucht.*
Die beyden Perpendikel.	Die Hypotenuſe - - - - -
	Ein Winkel - - - - - -
Die beyden Winkel.	Die Hypotenuſe - - - - -
	Ein Perpendikel - - - - -

x bezeichnet das jedesmal *Geſuchte.* Die Anmerk

Formel.

13) Log Cosin x = log Cosin des einen Perpendikels + log Cos des andern Perpend. — 10

14) Log Cotang x = log Sin anliegenden Perpendikels + log Cot gegenüberſteh. Perp. — 10

15) Log Cosin x = log Cotang des einen Winkels + log Cot des andern Winkels — 10

16) Log Cosin x = 10 + log Cos gegenüberſteh. Winkels — log Sin anliegenden Winkels.

bey vorhergehender Tafel 1 gilt auch hier.

Tafel 3.

Auflösung dreyer Fälle: 1, 12 und 13 in Tafel 1, durch die natürlichen Sinustafeln.

		Anstatt Formel
I.)	$\mathrm{Sin}\, b^* = \frac{1}{2}\mathrm{Cosin}\,(a - B^*) - \frac{1}{2}\mathrm{Cosin}\,(a + B^*)$	1
II.)	Wenn $B < c$:	
	$\mathrm{Cosin}\, C = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(c + B) - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(c - B)$	12
	Wenn $B > c$:	
	$\mathrm{Cosin}\, C = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(B + c) + \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(B - c)$	
III.)	$\mathrm{Cosin}\, a = \frac{1}{2}\mathrm{Cosin}\,(c + b) + \frac{1}{2}\mathrm{Cosin}\,(c - b)$	13

Tafel 4.

Auflösung der eilf Fälle: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 16 in Tafel 1 wenn die Sinus und Cosinus der gesuchten Bögen sehr grofs sind.

		Anstatt Formel
I.	$\begin{cases} \mathrm{Tang}\, c = \mathrm{Tang}\, a \,.\, \mathrm{Cosin}\, B^* \\ \mathrm{Tang}\, b^* = \mathrm{Tang}\, B^* .\, \mathrm{Sin}\, c \end{cases}$	1
II.	$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}b = +\sqrt{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a-c)\,.\,\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a+c)}$	4
III.	$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}B = +\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sin}\,(a-c)}{\mathrm{Sin}\,(a+c)}\right)}$	5
IV.	$\mathrm{Tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}C^*) = \pm\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a+c^*)}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a-c^*)}\right)}$	6
V. a zweifelhaft.	$\mathrm{Tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}a) = \pm\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(C+c)}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(C-c)}\right)}$	7
VI. b zweifelhaft.	$\mathrm{Tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}b) = \pm\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sin}\,(C+c)}{\mathrm{Sin}\,(C-c)}\right)}$	8

		Anstatt Formel
VII. B zweifelhaft	$\text{Tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\left(\dfrac{\text{Cot}\,\frac{1}{2}(C+c)}{\text{Tang}\,\frac{1}{2}(C-c)}\right)}$	9
VIII.	$\text{Cotang}\,a = \text{Cosin}\,B \,.\, \text{Cotang}\,c$ $\text{Cotang}\,C = \text{Cosin}\,a \,.\, \text{Tang}\,B$	12
IX.	$\text{Cotang}\,B = \text{Sin}\,c \,.\, \text{Cotang}\,b$ $\text{Cotang}\,a = \text{Cosin}\,B \,.\, \text{Cotang}\,c$	13
X.	$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,a = +\sqrt{\left(-\dfrac{\text{Cos}\,(B+C)}{\text{Cos}\,(B-C)}\right)}$	15
XI.	$\text{Cosin}\,a = \text{Cotang}\,B \,.\, \text{Cotang}\,C$ $\text{Tang}\,c = \text{Tang}\,a \,.\, \text{Cosin}\,B$	16

Oder:

$$\begin{cases} \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,a = +\sqrt{\left(-\dfrac{\text{Cos}\,(B+C)}{\text{Cos}\,(B-C)}\right)} \\ \text{Tang}\,c = \text{Tang}\,a \,.\, \text{Cos}\,B \end{cases}$$

Ta

für die Auflösung eines rechtwinklichten Kugel
und Winkel, sondern Summen und

Man sehe Tafel I.

Gegeben.		*Gesucht.*
(c+b), Summe der Perpendikel,	a Hypotenuse.	c oder b; c > b. Die beyden Perpendikel.
(c—b), Unterschied der Perpendikel.	a; c > b. Hypotenuse.	c oder b. Die beyden Perpendikel.
b, (a+c)		a oder c . . . . ; C . . . . .
Ein Perpendikel, und die Summe der Hypotenuse u. des andern Perpendikels.		Die Hypotenuse und das unbekannte Perpendikel. Der dem unbekannten Perpendikel gegenüberſteh. Winkel
b, (a—c)		a oder c; a > c . . . ; C . . . . .
Ein Perpendikel, und der Unterschied der Hypotenuse und des andern Perpendikels.		Die Hypotenuse und das unbekannte Perpendikel; Ob die Hyp. > oder < and. Perpen. muss bekannt seyn. Der dem unbekannten Perpendikel gegenüberſteh. Winkel

f e l 5

dreiecks, wenn nicht blos die einzelnen Seiten Unterschiede derselben gegeben sind.

Fig. IV.

Formel.

1) $\text{Cosin}\,(c-b) = 2 \,.\, \text{Cosin}\, a - \text{Cosin}\,(c+b)$

1) Cosin des Unterschiedes der beyden Perpendikel
= 2. Cos der Hypotenuse — Cos Summe d. Perpend.

---

2) $\text{Cosin}\,(c+b) = 2 \,.\, \text{Cosin}\, a - \text{Cosin}\,(c-b)$

2) Cosin Summe der Perpendikel
= 2. Cos Hypotenuse — Cos des Unterschiedes der Perpendikel

---

3) $\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(a-c) = \text{Tang}^2\,\tfrac{1}{2}\,b \,.\, \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,(a+c)$

Ist a + c so beschaffen, dass $\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(a-c)$ verneint wird, so ist

$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(c-a) = \text{Tang}^2\,\tfrac{1}{2}b \,.\, \text{Cot}\,\tfrac{1}{2}(a+c)$ und $c > a$.

4) $\text{Cotang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,b \,.\, \text{Cot}\,\tfrac{1}{2}\,(a+c)$

3) Tang ½ Unterschiedes der Hypot. vom Perpendikel
= Tang² ½ gegeb. Perpend. × Cot ½ gegebene Summe

4) Cotang (45° + ½ gesuchte Winkel)
= Tang ½ gegeb. Perpend. × Cot ½ gegebene Summe

---

5) $\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(a+c) = \text{Tang}^2\,\tfrac{1}{2}\,b \,.\, \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,(a-c)$

Für $a < c$ ist

$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(a+c) = \text{Tang}^2\,\tfrac{1}{2}\,b \,.\, \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,(c-a)$

6) $\text{Tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,b \,.\, \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,(a-c)$

Hier muss man wissen, ob $a >$ oder $< c$ ist; denn wenn $a > c$, so ist C spitzig, und wenn $a < c$, so ist C stumpf.

5) Tang ½ Summe d. Hypot. u. des unbekannten Perpend.
= Tang² ½ gegeb. Perp. × Cot ½ gegeb. Unterschied

6) Tang (45° + ½ gesuchte Winkel)
= Tang ½ gegeb. Perp. × Cot ½ gegeb. Unterschied

Gegeben.	*Geſucht.*
B, (a+c)	a oder c
Ein Winkel, u. die Summe der Hypotenuſe u. des anliegenden Perpendikels	Die Hypotenuſe und das anliegende Perpendikel
B, (a—c) $a > c$	a oder c
Ein Winkel, und der Unterſchied der Hypotenuſe u. des anliegenden Perpendikels	Die Hypotenuſe und das anliegende Perpendikel
C, (a+c)	a oder c - - - - b - - - - -
Ein Winkel, und die Summe der Hypoten. und des gegenüberſtehenden Perpendikels	Die Hypotenuſe und das gegenüberſtehende Perpendikel Das andere Perpendikel - -

Formel.

7) $\sin(a-c) = \mathrm{Tang}^2 \tfrac{1}{2} B \,.\, \sin(a+c)$
hat 2 Werthe.

Wird Sin (a + c) verneint, so ist c > a und

$$\sin(c-a) = + \mathrm{Tang}^2 \tfrac{1}{2} B \,.\, \sin(a+c)$$

7) Sin des Unterschiedes der Hypoten. vom Perpendikel
= Tang² ½ gegeben. Winkel × Sin gegeb. Summe.

---

8) $\sin(a+c) = \mathrm{Cotang}^2 \tfrac{1}{2} B \,.\, \sin(a-c)$
hat 2 Werthe.

Weis man dass c > a, so ist:

$$\sin(a+c) = \mathrm{Cotang}^2 \tfrac{1}{2} B \,.\, \sin(c-a).$$

8) Sin der Summe der Hypoten. u. des anliegend. Perpend.
= Cot² ½ gegeb. Winkel × Sin gegeb. Unterschied.

---

9) $\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a-c) = \mathrm{Cot}^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} C) \,.\, \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a+c)$

Wird Tang ½ (a + c) negativ, so hat man c > a und

$$\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(c-a) = +\mathrm{Cot}^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} C) \,.\, \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a+c).$$

10) $\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2} b = \mathrm{Cotang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} C) \,.\, \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a+c)$

9) Tang ½ Unterschiedes der Hypoten. vom Perpendikel
= Cot² (45° + ½ gegeb. Wink.) × Tang ½ gegeb. Summe

10) Tang ½ gesuchten Perpendikels.
= Cot (45° + ½ gegeb. Winkel) × Tang ½ gegeb. Summe

Gegeben.	Gesucht.	
C*, (a — c*)	a oder c;	Ist C spitzig so ist a > c - - -
	b - - - - - - - - -	
Ein Winkel, und der Unterschied zwischen der Hypotenuse und dem gegenüberstehenden Perpendikel.	Die Hypotenuse und das gegenüberstehende Perpendikel; ob die Hypot. > oder < gegenüberst. Perpend. wird aus dem gegebenen Winkel bekannt seyn - - - - - - - -	
	Das andere Perpendikel - - -	
(B + C), a	B oder C C > B	
Die Summe der Winkel, u. die Hypotenuse	Die beyden Winkel	
C — B, a C > B	B oder C	
Der Untersch. der Winkel, u. die Hypotenuse.	Die beyden Winkel	

Formel.

11) $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a+c) = \mathrm{Tang}^2(45^\circ+\frac{1}{2}C) \,.\, \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a-c)$

Für $a < c$ d. i. wenn C ſtumpf, iſt

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a+c) = \mathrm{Tang}^2(45^\circ+\frac{1}{2}C) \,.\, \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(c-a).$$

12) $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}b = \mathrm{Tang}\,(45^\circ+\frac{1}{2}C) \,.\, \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a-c)$

Hier findet man b ohne vorher auszumachen, ob $a > $ oder $< c$. Hierauf läſst ſich aus b und C durch Fo. 10 und 11 in Tafel 1 oder 2 a und c ſuchen. *Aber* wenn man weis, (und dies läſst ſich allezeit aus dem gegebenen Winkel C beurtheilen, iſt nemlich C ſpitzig, ſo iſt $C < A = 90^\circ$, folglich auch $c < a$; und wenn C ſtumpf, ſo iſt $C > A = 90^\circ$, daher $c > a$) daſs $a > c$, ſo iſt gegeben: $a - c = m$; wird nun nur z. E. a durch Fo. 10 in Tafel 1 oder 2 geſucht, ſo hat man ſogleich $c = a - m$ ohne den Gebrauch der Fo. 11 in Tafel 1 und 2. Iſt bekannt daſs $a < c$, ſo iſt gegeben, $c - a = \mu$, daſs alſo, wenn man z. E. a durch Fo. 10 in Tafel 1, 2 gefunden, ſich, ohne Fo. 11 in beyden Tafeln, $c = a + \mu$ ergiebt.

11) Tang $\frac{1}{2}$ Summe der Hypot. u. des gegenüberſt. Perp.
= Tang^2 (45° + $\frac{1}{2}$ gegeb. Winkel) × Tang $\frac{1}{2}$ gegebenen Unterſchied.

12) Tang $\frac{1}{2}$ geſuchten Perpendikels
= Tang (45° + $\frac{1}{2}$ gegeb. Winkel) × Tang $\frac{1}{2}$ gegebenen Unterſchied.

---

13) $\mathrm{Cosin}\,(C-B) = -\,\mathrm{Cosin}\,(B+C) \,.\, \mathrm{Cotang}^2\,\frac{1}{2}a$

13) Cosin des Unterſchiedes der Winkel
= — Cosin gegebene Summe × Cot^2 $\frac{1}{2}$ Hypotenuſe.

---

14) $\mathrm{Cosin}\,(B+C) = -\,\mathrm{Cosin}\,(C-B) \,.\, \mathrm{Tang}^2\,\frac{1}{2}a$

14) Cosin der Summe der Winkel
= — Cos gegeb. Unterſch. × Tang^2 $\frac{1}{2}$ Hypotenuſe.

Beyſpiel 1 zu Formel 6 in Tafel 1, 2 und 4.

$a = 61^\circ\ 4'\ 56''$; $c = 40^\circ\ 30'\ 20''$ *ſpitzig.*

Rechnung nach Fo. 6 in Tafel 1, 2.

$$10 + \log \text{Sin}\ c^* = 19{,}8125937$$
$$- \log \text{Sin}\ a = 9{,}9421641$$

$$\log \text{Sin}\ C^* = 9{,}8704296$$
$$C = 47^\circ\ 54'\ 21''$$ *ſpitzig.*

Rechnung nach IV in Tafel 4.

$$a + c = 101^\circ\ 35'\ 16''$$
$$\tfrac{1}{2}(a + c) = 50.\ 47.\ 38.$$
$$a - c = 20.\ 34.\ 36.$$
$$\tfrac{1}{2}(a - c) = 10.\ 17.\ 18.$$

$$20 + \log \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(a + c) = 30{,}0884388$$
$$- \log \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(a - c) = 9{,}2589256$$

$$\text{Unterſchied} = 20{,}8295132$$
$$\text{Hälfte} = \log \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}C) = 10{,}4147566$$
$$45^\circ + \tfrac{1}{2}C = 68^\circ\ 57'\ 10'',5$$
$$- 45^\circ = 45.\ 0.\ 0.$$

$$\tfrac{1}{2}C = 23.\ 57.\ 10{,}5$$
$$C = 47.\ 54.\ 21.$$ *ſpitzig.*

Beyspiel 2 zu Formel 6 in Tafel 1, 2 und 4.

$a = 100^\circ$; $c = 120^\circ$ *stumpf.*

Rechnung nach Fo. 6 in Tafel 1, 2.

$$10 + \log \operatorname{Sin} c^* = 19,9375306$$
$$- \log \operatorname{Sin} a = 9,9933515$$

$$\log \operatorname{Sin} 61^\circ\ 34'\ 6'' = 9,9441791$$
$$180.\ 0.\ 0.$$

$C^* = 118.\ 25.\ 54.$ *stumpf.*

Rechnung nach IV in Tafel 4.

$$a + c = 220^\circ\ 0'\ 0''$$
$$\tfrac{1}{2}(a + c) = 110.\ 0.\ 0.$$
$$a - c = -20.\ 0.\ 0.$$
$$\tfrac{1}{2}(a - c) = -10.\ 0.\ 0.$$

$$20 + \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + c) = -30,4389341$$
$$- \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - c) = -\ 9,2463188$$

$$\text{Unterschied} = 21,1926153$$
$$\text{Hälfte} = \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} C) = 10,5963076$$
$$45^\circ + \tfrac{1}{2} C = 75^\circ\ 47'\ 3''$$
$$- 45^\circ = 45.\ 0.\ 0.$$

$$\tfrac{1}{2} C = 30.\ 47.\ 3.$$
$C = 61.\ 34.\ 6.$ spitzig.

$C^* = 118.\ 25.\ 54.$ *stumpf.*

Allgemeine Regel für die Auflösung derjenigen schiefwinklichten Kugeldreiecke, wo eine Seite $= 90°$ ist.

Man sehe Tafel I. Fig. IV. und V.

Ein solches Kugeldreieck muss man in ein anderes verwandeln, dessen Winkel die Supplemente, oder Ergänzungen zu 180°, der Seiten, und dessen Seiten die Supplemente der Winkel des gegebenen Dreiecks sind. Auf diese Weise erhält man ein rechtwinklichtes Kugeldreieck, dessen Auflösung sich nach den vorhergehenden Tafeln bewerkstelligen läst.

Wenn z. B. in Fig. V.

gegeben wäre	und *gesucht* würde
A = 90°	C = 83° 36′
B = 41° 10′	
c = 80. 15.	

so nähme man von jedem dieser drey gegebenen Bögen sein Supplement zu 180°, und setzte diese Supplemente ebendenselben Buchstaben in Fig. IV gleich, nemlich

A = 90°
B = 138° 50′
c = 99. 45.

Nun suchte man hieraus zu Fig. IV: C = 96° 24′, so wäre das Supplement von diesem C in Fig. IV, d. i. 180° — C = 83° 36′, das Fig. V. gesuchte C.

Eben so reduzirt man in allen übrigen Fällen das Dreieck in Fig. V. auf Fig. IV.

Auflösung
gleichschenklichter
Kugeldreiecke.

Man sehe Tafel I.
Fig. VI.

Fall 1.

Gegeben.

a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.

Gesucht.

A d. i. Winkel an der Grundlinie.

Formel.

1) $\mathrm{Cosin}\,A = \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}b \,.\, \mathrm{Cotang}\,a$

2) $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}A = + r\left(\frac{\mathrm{Sin}\,(a - \frac{1}{2}b)}{\mathrm{Sin}\,(a + \frac{1}{2}b)}\right)$

Fall 2.

Gegeben.

a, b d. i. Schenkel und Grundlinie.

Gesucht.

B d. i. Winkel an der Spitze.

Formel.

1) $\mathrm{Sin}\,\frac{B^*}{2} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{b^*}{2}}{\mathrm{Sin}\,a}$

2) $\mathrm{Tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}.\frac{B^*}{2}) = \pm r\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\,[a + \frac{b^*}{2}]}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\,[a - \frac{b^*}{2}]}\right)$

$\frac{b}{2}$ und $\frac{B}{2}$ ſind allezeit gleichartig; oder $\frac{B}{2}$ iſt allemal ſpitzig, weil es $\frac{b}{2}$ ſtets iſt.

Fall 3.

Gegeben.

a, A, d. i. Schenkel und Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.

b d. i. Grundlinie.

Formel.

$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}b = \mathrm{Tang}\,a \,.\, \mathrm{Cosin}\,A.$

Fall 4.

Gegeben.

a, A, d. i. Schenkel und Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.

B d. i. Winkel an der Spitze.

Formel.

$\mathrm{Cotang}\ \frac{1}{2} B = \mathrm{Cosin}\ a \,.\ \mathrm{Tang}\ A.$

Fall 5.

Gegeben.

a, B d. i. Schenkel und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

b d. i. Grundlinie.

Formel.

1) $\mathrm{Sin}\ \frac{b}{2}* = \mathrm{Sin}\ a \,.\ \mathrm{Sin}\ \frac{B}{2}*$

2) $\mathrm{Sin}\ \frac{b}{2}* = \frac{1}{2}\ \mathrm{Cosin}\ (a - \frac{B}{2}*) - \frac{1}{2}\ \mathrm{Cosin}\ (a + \frac{B}{2}*)$

3) $\mathrm{Tang}\ u = \mathrm{Tang}\ a \,.\ \mathrm{Cosin}\ \frac{B}{2}*;$

$\mathrm{Tang}\ \frac{b}{2}* = \mathrm{Tang}\ \frac{B}{2}* \,.\ \mathrm{Sin}\ u$

$\frac{B}{2}$ und $\frac{b}{2}$ ſind allezeit gleichartig oder ſpitzig.

Fall 6.

Gegeben.

a, B d. i. Schenkel und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

A d. i. Winkel an der Grundlinie.

Formel.

$\mathrm{Cotang}\ A = \mathrm{Cosin}\ a \,.\ \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2} B.$

Fall 7.

Gegeben.

b, A d. i. Grundlinie und Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.

a d. i. Schenkel.

Formel.

$\mathrm{Cotang}\ a = \mathrm{Cotang}\ \frac{1}{2} b \,.\ \mathrm{Cosin}\ A.$

Fall 8.

Gegeben.

b, A d. i. Grundlinie und Winkel an der Grundlinie.

Gesucht.

B d. i. Winkel an der Spitze.

Formel.

1) $\text{Cosin}\ \frac{1}{2} B = \text{Cosin}\ \frac{1}{2} b \,.\, \text{Sin}\ A.$

2) Wenn $A < \frac{1}{2} b$:

$\text{Cosin}\ \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \text{Sin}\ (\frac{1}{2} b + A) - \frac{1}{2} \text{Sin}\ (\frac{1}{2} b - A);$

Wenn $A > \frac{1}{2} b$:

$\text{Cosin}\ \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \text{Sin}\ (A + \frac{1}{2} b) + \frac{1}{2} \text{Sin}\ (A - \frac{1}{2} b).$

3) $\text{Cotang}\ a = \text{Cosin}\ A \,.\, \text{Cotang}\ \frac{1}{2} b;$

$\text{Cotang}\ \frac{1}{2} B = \text{Cosin}\ a \,.\, \text{Tang}\ A.$

Fall 9.

Gegeben.

b, B d. i. Grundlinie und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

a d. i. Schenkel.

a *zweifelhaft.*

Formel.

1) $\text{Sin}\ a = \dfrac{\text{Sin}\ \frac{1}{2} b}{\text{Sin}\ \frac{1}{2} B}$

2) $\text{Tang}\ (45^\circ + \frac{1}{2} a) = \pm \sqrt{\dfrac{\text{Tang}\ \frac{1}{4} [B + b]}{\text{Tang}\ \frac{1}{4} [B - b]}}$

Fall 10.

Gegeben.

b, B d. i. Grundlinie und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

A d. i. Winkel an der Grundlinie.

A *zweifelhaft.*

Formel.

1) $\text{Sin } A = \dfrac{\text{Cosin } \frac{1}{2} B}{\text{Cosin } \frac{1}{2} b}$

2) $\text{Tang } (45^\circ + \frac{1}{2} A) = \pm \sqrt{\dfrac{\text{Cotang } \frac{1}{4} [B+b]}{\text{Tang } \frac{1}{4} [B-b]}}$

Fall 11.

Gegeben.

A, B d. i. Winkel an der Grundlinie, und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

a d. i. Schenkel.

Formel.

1) $\text{Cosin } a = \text{Cotang } A \,.\, \text{Cotang } \frac{1}{2} B$

2) $\text{Tang } \frac{1}{2} a = + \sqrt{- \dfrac{\text{Cosin } (A + \frac{1}{2} B)}{\text{Cosin } (A - \frac{1}{2} B)}}$

Fall 12.

Gegeben.

A, B d. i. Winkel an der Grundlinie, und Winkel an der Spitze.

Gesucht.

b d. i. Grundlinie.

Formel.

1) $\text{Cosin } \frac{1}{2} b = \dfrac{\text{Cosin } \frac{1}{2} B}{\text{Sin } A}$

2) $\text{Cosin } a = \text{Cotang } A \,.\, \text{Cotang } \frac{1}{2} B$;
$\text{Tang } \frac{1}{2} b = \text{Tang } a \,.\, \text{Cosin } A.$

3) $\text{Tang } \frac{1}{2} a = + \sqrt{- \dfrac{\text{Cosin } [A + \frac{1}{2} B]}{\text{Cosin } [A - \frac{1}{2} B]}}$;
$\text{Tang } \frac{1}{2} b = \text{Tang } a \,.\, \text{Cosin } A.$

Auflösung schiefwinklichter Kugeldreiecke.

Man sehe Tafel I.
Fig. VII.

$BC = a;$ $AC = b;$ $AB = c.$

Fall 1.

Gegeben.

a, b, c, oder die drey Seiten.

Gesucht.

Ein Winkel oder x.

Formel.

$$\frac{a+b+c}{2} = S \text{ gesetzt, und}$$

a für die Seite angenommen, welche dem gesuchten Winkel x gegenübersteht, ist:

1) $$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,x = r\left\{\frac{\text{Sin}(S-b)\,.\,\text{Sin}(S-c)}{\text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,c}\right\};$$

$$\log \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,x = \tfrac{1}{2}\,.\,(20 + \log \text{Sin}(S-b) + \log \text{Sin}(S-c) - \log \text{Sin}\,b - \log \text{Sin}\,c)$$

2) $$\text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\,x = r\left\{\frac{\text{Sin}\,S\,.\,\text{Sin}\,(S-a)}{\text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,c}\right\}$$

3) $$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,x = r\left\{\frac{\text{Sin}\,(S-b)\,.\,\text{Sin}\,(S-c)}{\text{Sin}\,S\,.\,\text{Sin}\,(S-a)}\right\}$$

4) Man nenne Basis = c;
Seiten = a, b;

so ist

$$\text{Tang}\,u = \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)\,.\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(a \backsim b)\,.\,\text{Cot}\,\tfrac{1}{2}\,c;$$

das Zeichen $\backsim$ bedeutet, dass allezeit der kleinere Bogen vom grössern abgezogen werden soll.

Grosses Segment $= \tfrac{1}{2}\,c + u$;

Kleines Segment $= \tfrac{1}{2}\,c - u$;

Cosin x = Tang des anliegenden Segments . Cot b;

In dieser letzten Gleichung nimmt man zu der grössten *Seite* das grosse Segment, das kleine zu der kleinsten *Seite*: und wenn das kleine Segment negativ und $<$ 90° sich findet, so setzt man die Tangente dieses Segments negativ.

In manchen Fällen können auch folgende Formeln brauchbar ſeyn, in welchen ich den geſuchten Winkel A ſtatt x nenne:

5) $\text{Cosin } A = \frac{\text{Cosin } a - \text{Cosin } b \,.\, \text{Cosin } c}{\text{Sin } b \,.\, \text{Sin } c}$;

6) $\text{Cosin } A = \frac{\text{Cosin } a}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c} - \text{Cotang } b \,.\, \text{Cotang } c$;

7) $\text{Cosin } A = 1 - \frac{\text{Cosin } (b - c) - \text{Cosin } a}{\text{Sin } b \,.\, \text{Sin } c}$;

8) α) $\text{Cos } (b - c) + \text{Cos } (b + c) = p$;
β) $\text{Cos } (b - c) - \text{Cos } (b + c) = q$;
γ) $\text{Cos } A = \frac{\text{Cos } a - \frac{1}{2} p}{\frac{1}{2} q}$.

9) $\text{Sin } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + [b - c]) \,.\, \text{Sin } \frac{1}{2} (a - [b - c])}{\text{Sin } b \,.\, \text{Sin } c}}$;

10) $\text{Cosin } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] + a) \,.\, \text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] - a)}{\text{Sin } b \,.\, \text{Sin } c}}$;

11) $\text{Tang } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + [b - c]) \,.\, \text{Sin } \frac{1}{2} (a - [b - c])}{\text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] + a) \,.\, \text{Sin } \frac{1}{2} ([b + c] - a)}}$.

12) Alle drey Winkel auf einmal ergeben ſich durch folgende Gleichungen:

$a > b$;

$\text{Cotang } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} ([a + b] + c) \,.\, \text{Sin } \frac{1}{2} ([a + b] - c)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (c + [a - b]) \,.\, \text{Sin } \frac{1}{2} (c - [a - b])}}$;

$\text{Tang } \tfrac{1}{2} (A + B) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (a - b) \,.\, \text{Cotang } \frac{1}{2} C}{\text{Cos } \frac{1}{2} (a + b)}$;

$\text{Tang } \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (a - b) \,.\, \text{Cotang } \frac{1}{2} C}{\text{Sin } \frac{1}{2} (a + b)}$;

$\tfrac{1}{2} (A + B) + \tfrac{1}{2} (A - B) = A$;
$\tfrac{1}{2} (A + B) - \tfrac{1}{2} (A - B) = B$.

13) Man ſehe die Anmerkung im folgenden Fall 2, bey 13.

Fall 2.

Gegeben.

A, B, C, oder die drey Winkel.

Gesucht.

Eine Seite oder x.

Formel.

$$\frac{A + B + C}{2} = S \text{ und}$$

A für denjenigen Winkel angenommen, welcher der gesuchten Seite x gegenübersteht, ist:

$$1)\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ x = \sqrt{-\frac{\text{Cosin}\ S\ .\ \text{Cosin}\ (S - A)}{\text{Sin}\ B\ .\ \text{Sin}\ C}}$$

$$2)\ \text{Cosin}\ \tfrac{1}{2}\ x = \sqrt{\frac{\text{Cosin}\ (S - B)\ .\ \text{Cosin}\ (S - C)}{\text{Sin}\ B\ .\ \text{Sin}\ C}}$$

$$3)\ \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}\ x = \sqrt{-\frac{\text{Cosin}\ S\ .\ \text{Cosin}\ (S - A)}{\text{Cos}\ (S - B)\ .\ \text{Cos}\ (S - C)}}$$

4) Es heisse *Vertikalwinkel* = C;

Winkel schlechtweg = A, B;

so ist

$$\text{Tang}\ u = \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}(A + B)\ .\ \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}(A \sim B)\ .\ \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}C;$$

Grosses Segment = $\frac{1}{2}C + u$;

Kleines Segment = $\frac{1}{2}C - u$;

Cosin x = Cot *des anliegenden Segments* $\times$ Cot B.

In dieser letzten Gleichung nimmt man zu dem grössten *Winkel* das kleine Segment, und das grosse Segment zu dem kleinsten *Winkel*: findet sich das kleine Segment negativ und $< 90^\circ$, so setzt man die Cotangente dieses Segments negativ.

a ſtatt x geſetzt, iſt:

5) $\text{Cosin } a = \dfrac{\text{Cosin } A + \text{Cosin } B \,.\, \text{Cosin } C}{\text{Sin } B \,.\, \text{Sin } C}$;

6) $\text{Cosin } a = \dfrac{\text{Cosin } A}{\text{Sin } B \,.\, \text{Sin } C} + \text{Cotang } B \,.\, \text{Cotang } C$;

7) $\text{Cosin } a = \dfrac{\text{Cosin } (B - C) + \text{Cosin } A}{\text{Sin } B \,.\, \text{Sin } C} - 1$;

8) α) $\text{Cos } (B - C) + \text{Cos } (B + C) = P$;

β) $\text{Cos } (B - C) - \text{Cos } (B + C) = Q$;

γ) $\text{Cos } a = \dfrac{\text{Cos } A + \frac{1}{2} P}{\frac{1}{2} Q}$;

9) $\text{Sin } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left(- \dfrac{\text{Cos } \frac{1}{2}([B+C]+A) \,.\, \text{Cos } \frac{1}{2}([B+C]-A)}{\text{Sin } B \,.\, \text{Sin } C} \right)}$;

10) $\text{Cos } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left(\dfrac{\text{Cos } \frac{1}{2}(A+[B-C]) \,.\, \text{Cos } \frac{1}{2}(A-[B-C])}{\text{Sin } B \,.\, \text{Sin } C} \right)}$;

11) $\text{Tang } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left(- \dfrac{\text{Cos } \frac{1}{2}([B+C]+A) \,.\, \text{Cos } \frac{1}{2}([B+C]-A)}{\text{Cos } \frac{1}{2}(A+[B-C]) \,.\, \text{Cos } \frac{1}{2}(A-[B-C])} \right)}$;

12) Alle drey Seiten auf einmal:

$A > B$;

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\left(- \dfrac{\text{Cos } \frac{1}{2}([A+B]+C) \,.\, \text{Cos } \frac{1}{2}([A+B]-C)}{\text{Cos } \frac{1}{2}(C+[A-B]) \,.\, \text{Cos } \frac{1}{2}(C-[A-B])} \right)};$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} (a+b) = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (A - B) \,.\, \text{Tang } \frac{1}{2} c}{\text{Cos } \frac{1}{2} (A+B)};$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} (a-b) = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A - B) \,.\, \text{Tang } \frac{1}{2} c}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A+B)};$$

$$\tfrac{1}{2} (a+b) + \tfrac{1}{2} (a-b) = a;$$

$$\tfrac{1}{2} (a+b) - \tfrac{1}{2} (a-b) = b.$$

13) Es lassen sich auch aus den drey Winkeln A, B, C, die Seiten a, b, c, durch Hülfe des sogenannten *Polar-* oder *Ergänzungs-Dreiecks* berechnen, indem man gegenwärtigen Fall auf den vorigen ersten, wo aus den drey Seiten die Winkel gefunden werden, auf folgende Art reduzirt:

Man nimmt jedes Winkels Erganzung zu 180°, d. i. man macht *Taf. I. Fig. VIII.*

$$180° - A = \alpha;$$
$$180° - B = \beta;$$
$$180° - C = \gamma;$$

nun sucht man aus den drey Seiten α, β, γ nach den Formeln des vorigen 1sten Falles, die gegenüberstehenden Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; so ist

$$a = 180° - \mathfrak{A};$$
$$b = 180° - \mathfrak{B};$$
$$c = 180° - \mathfrak{C}.$$

Anmerkung zu Fall 1.

Eben so läſst sich Fall 1 auf den gegenwärtigen Fall 2 reduziren. Nemlich:

$$180° - a = \mathfrak{A};$$
$$180° - b = \mathfrak{B};$$
$$180° - c = \mathfrak{C};$$

aus den Winkeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ergeben sich die gegenüberstehenden Seiten α, β, γ; endlich

$$A = 180° - \alpha;$$
$$B = 180° - \beta;$$
$$C = 180° - \gamma.$$

Fall 3.

Gegeben.

Zwey Seiten und der eingeſchloſſene Winkel, oder x, a und C.

Geſucht.

Einer von den beyden übrigen Winkeln, oder X.

Formel.

x bedeute die dem geſuchten Winkel
X gegenüberſtehende Seite;
a die andere gegebene Seite; und
C den gegebenen Winkel. So iſt:

1) $\text{Tang } u = \text{Tang } x \,.\, \text{Cosin } C;$

$$\text{Tang } X = \frac{\text{Tang } C \,.\, \text{Sin } u}{\text{Sin } (a-u)}.$$

Wenn $u > a$, iſt Sinus $(a-u)$ verneint.

2) $$\text{Tang } X = \frac{\text{Sin } C}{\text{Sin } a \,.\, \text{Cotang } x - \text{Cosin } a \,.\, \text{Cosin } C};$$

3) $$\text{Cotang } X = \frac{\text{Sin } a}{\text{Sin } C \,.\, \text{Tang } x} - \text{Cosin } a \,.\, \text{Cotang } C;$$

4) $$\text{Cotang } X = \frac{\text{Sin } a \,.\, \text{Cosin } x - \text{Cosin } a \,.\, \text{Sin } x \,.\, \text{Cosin } C}{\text{Sin } x \,.\, \text{Sin } C};$$

5) $\text{Tang } u = \text{Cotang } a \,.\, \text{Tang } x \,.\, \text{Cosin } C;$

$$\text{Tang } X = \frac{\text{Sin } C \,.\, \text{Tang } x \,.\, \text{Cosin } u}{\sqrt{2} \,.\, \text{Sin } a \,.\, \text{Sin } (45° - u)}.$$

6) $$\text{Tang } u = \frac{\text{Cotang } \tfrac{1}{2} C \,.\, \text{Sin } (x \backsim a)}{\text{Sin } (x+a)};$$

Groſses Segment $= \tfrac{1}{2} C + u;$
Kleines Segment $= \tfrac{1}{2} C - u;$

$\text{Cot } X = \text{Cos } a \,.\, \text{Tang}$ *des anliegenden Segments.*

In dieſer letzten Gleichung nimmt man zu der gröſsten von den bekannten Seiten (d. i. zu $a > x$) das groſse Segment, zu der kleinſten (d. i. wenn $a < x$) das kleine Segment: und wenn das kleine Segment negativ und $< 90°$ iſt, ſo ſetzt man die Tang. dieſes Segments negativ.

7) Die beyden Winkel auf einmal ergeben ſich durch folgende Formeln, wobey ich mich aber einer andern Bezeichnungsart bediene:

Gegeben.

b, c, A

$b > c$

oder 2 Seiten b, c und der eingeſchloſſene Winkel A.

Geſucht.

B und C

$B > C$

oder die beyden Winkel B und C auf einmal.
B ſteht b und C ſteht c gegenüber.

Formel.

1) $\text{Tang}\,\frac{1}{2}(B+C) = \frac{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(b-c)\,.\,\text{Cot}\,\frac{1}{2}A}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}(b+c)}$;

2) $\text{Tang}\,\frac{1}{2}(B-C) = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(b-c)\,.\,\text{Cot}\,\frac{1}{2}A}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(b+c)}$;

3) $\frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(B-C) = B$;

4) $\frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B-C) = C$.

8) Man ſehe 6) bey Fall 5.

Fall 4.

Gegeben.

2 Seiten und der eingeſchloſſene Winkel, oder
a, c und B.
$a > c$

Geſucht.

Die dritte Seite, oder b.

Erſte Formel.

$\text{Tang}\,u = \text{Tang}\,a\,.\,\text{Cos}\,B$;

$\text{Cosin}\,b = \frac{\text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,(c-u)}{\text{Cos}\,u}$

Zweyte Formel.

$\text{Cosin}\,b = \text{Cosin}\,B\,.\,\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,c + \text{Cosin}\,a\,.\,\text{Cosin}\,c$;

Dritte Formel.

α) Für B ſpitzig:

$$\text{Cos}\, b = \text{Cos}\,(a-c) - (1 - \text{Cos}\, B) \,.\, \text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, c;$$

β) Für B ſtumpf:

$$\text{Cos}\, b = \text{Cos}\,(a+c) + (1 + \text{Cos}\, B) \,.\, \text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, c.$$

Wenn die geſuchte Seite b klein iſt, kann man ſich folgender Formeln bedienen:

Vierte Formel.

$$\text{Tang}\, u = \sqrt{\left(\frac{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} B \,.\, \text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, c}{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}(a-c)}\right)};$$

$$\text{Sin}\, \tfrac{1}{2} b = \frac{\text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a-c)}{\text{Cosin}\, u}.$$

Für die logarithmiſche Rechnung:

$$\text{Log Tang}\, u$$
$$= \tfrac{1}{2} \,.\, (\log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} B + \log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} B + \log \text{Sin}\, a + \log \text{Sin}\, c$$
$$- \log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a-c) - \log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a-c));$$

$$\log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} b = 10 + \log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a-c) - \log \text{Cos}\, u.$$

Fünfte Formel.

$$\text{Cosin}\, u = \sqrt{\left(\frac{\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2} B \,.\, \text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, c}{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}(a+c)}\right)};$$

$$\text{Sin}\, \tfrac{1}{2} b = \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a+c) \,.\, \text{Sin}\, u.$$

Für die logarithmiſche Rechnung:

$$\text{Log Cosin}\, u$$
$$= \tfrac{1}{2} (\log \text{Cos}\, \tfrac{1}{2} B + \log \text{Cos}\, \tfrac{1}{2} B + \log \text{Sin}\, a + \log \text{Sin}\, c$$
$$- \log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a+c) - \log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a+c));$$

$$\log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2} b = \log \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(a+c) + \log \text{Sin}\, u - 10.$$

6) Man ſehe 6) bey Fall 6.

Fall 5.

Gegeben.

Zwey Winkel und die eingeſchloſſene Seite, oder X, C und b.

Geſucht.

Eine von den beyden übrigen Seiten, oder *x*.

Formel.

Es heiſse allezeit:

X derjenige von den beyden gegebenen Winkeln, welcher

x d. i. der geſuchten Seite gegenüberſteht;

C der andere gegebene Winkel,

b die gegebene Seite. So iſt:

1) $\text{Cotang } u = \text{Tang } X \,.\, \text{Cosin } b;$

$$\text{Tang } x = \frac{\text{Tang } b \,.\, \text{Cosin } u}{\text{Cosin } (C - u)}.$$

Oder nach einer 2ten Auflöſungsart:

2) $\text{Tang } u = \text{Tang } X \,.\, \text{Cosin } b;$

$$\text{Tang } x = \frac{\text{Tang } b \,.\, \text{Sin } u}{\text{Sin } (C + u)}.$$

3) $$\text{Tang } x = \frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } C \,.\, \text{Cotang } X + \text{Cosin } C \,.\, \text{Cosin } b};$$

4) $$\text{Tang } u = \frac{\text{Tang } \tfrac{1}{2} b \,.\, \text{Sin } (X \backsim C)}{\text{Sin } (X + C)};$$

Groſses Segment $= \tfrac{1}{2} b + u;$

Kleines Segment $= \tfrac{1}{2} b - u;$

$\text{Cotang } x = \text{Cos } C \,.\, \text{Cotang}$ *des anliegenden Segments.*

In dieſer letzten Gleichung gebraucht man bey dem kleinſten von den beyden bekannten Winkeln das groſse Segment; das kleine Segment bey dem gröſsten: wenn das kleine Segment negativ und $< 90°$ gefunden wird, ſo ſetzt man die *Cotang* dieſes Segments negativ.

5) Die beyden unbekannten Seiten auf einmal:

Gegeben.	*Gesucht.*
A, B, c	a, b
A > B	a > b

Formel.

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\,.\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}c}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)};$$

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\,.\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}c}{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B)};$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{1}{2}(a-b) = a;$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}(a-b) = b.$$

6) Dieser Fall läſst ſich auch durch Reduktion auf F
3 auflöſen, da man auf eine ähnliche Art wie
Fall 2 geſchehen iſt, das Polar- oder Ergänzun
dreieck ſtatt des gegebenen gebraucht. Daher
ſich umgekehrt, Fall 3 durch Fall 5 ebenfalls au
ſen. Wenn man ſich nemlich hiezu Tafel I. Fig.
bedient, ſo iſt:

Für Fall 5 durch Fall 3.

Gegeben: A, B, c.

Auflöſung:

$$180^\circ - A = \alpha$$
$$180^\circ - B = \beta$$
$$180^\circ - c = \mathfrak{C}$$

Aus den Seiten α, β und dem eingeſchloſſenen Winkel $\mathfrak{C}$ wird der Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach Fall 3 berechnet. Alsdann iſt:

$$a = 180^\circ - \mathfrak{A}.$$
$$b = 180^\circ - \mathfrak{B}.$$

Für Fall 3 durch Fall

Gegeben: a, b, C

Auflöſung:

$$180^\circ - a = \mathfrak{A}$$
$$180^\circ - b = \mathfrak{B}$$
$$180^\circ - C = \gamma$$

Aus den Winkeln $\mathfrak{A}$, und der eingeſchloſſene Seite γ berechnet man n Fall 5 die Seite α und alsdann iſt:

$$A = 180^\circ - \alpha$$
$$B = 180^\circ - \beta.$$

Fall 6.

Gegeben.

Zwey Winkel und die eingeschlossene Seite, oder A, B und c

Gesucht.

Der dritte Winkel oder C

Formel.

Es sey:

A Einer von den beyden gegebenen Winkeln, entweder der grösere oder der kleinere;

B der andere gegebene Winkel;

c die gegebene Seite. So ist:

1) $\text{Cotang } u = \text{Cosin } c . \text{ Tang } A$;

$$\text{Cosin } C = \frac{\text{Cosin } A . \text{ Sin } (B - u)}{\text{Sin } u}.$$

Wenn $u > B$, ist $\text{Sin } (B - u)$ verneint.

2) $\text{Tang } u = \text{Cosin } c . \text{ Tang } A$;

$$\text{Cosin } C = \frac{- \text{Cosin } A . \text{ Cosin } (B + u)}{\text{Cosin } u}$$

3) $\text{Cosin } C = \text{Cosin } c . \text{ Sin } A . \text{ Sin } B - \text{Cosin } A . \text{ Cosin } B$;

4) α) Wenn c spitzig:

$\text{Cos } C = - \text{Cos } (A + B) - (1 - \text{Cos } c) . \text{ Sin } A . \text{ Sin } B$;

β) Wenn c stumpf:

$\text{Cos } C = - \text{Cos } (A - B) + (1 + \text{Cos } c) . \text{ Sin } A . \text{ Sin } B$.

5) Wenn der gesuchte Winkel C klein ist, und für den Tafel-Halbmesser $= r$:

$$\text{Tang } u = r \left(\frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} c . \text{ Sin } \tfrac{1}{2} c . \text{ Sin } A . \text{ Sin } B}{\text{Cos } \tfrac{1}{2} (A + B) . \text{ Cos } \tfrac{1}{2} (A + B)} \right);$$

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} C = \frac{r . \text{ Cosin } \tfrac{1}{2} (A + B)}{\text{Cosin } u}.$$

6) Durch das Ergänzungsdreieck. Man sehe Tafel Figur IX.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 180^\circ - A \\ \beta = 180^\circ - B \\ \mathfrak{C} = 180^\circ - c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Hieraus nach Fall 4:} \\ \gamma\text{; und dies giebt:} \\ C = 180^\circ - \gamma. \end{array}$$

Eben so Fall 4 durch Fall 6:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = 180^\circ - a \\ \mathfrak{B} = 180^\circ - b \\ \gamma = 180^\circ - C \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Hieraus nach Fall 6:} \\ \mathfrak{C}\text{; und dies giebt:} \\ c = 180^\circ - \mathfrak{C}. \end{array}$$

Fall 7.

Gegeben.

2 Seiten und ein gegenüberstehender Winkel, oder a, b und A.

Gesucht.

Der Winkel, welcher der andern gegebenen Sei gegenübersteht, oder B.

Formel.

$$\text{Sin } B = \frac{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } A}{\text{Sin } a}.$$

Der gesuchte Winkel B ist zweydeutig, wenn folge de Regel nicht die Ungewissheit aufhebt:

Je nachdem $a + b >$ oder $<$ oder $= 180^\circ$, ist auch $A + B >$ oder $<$ oder $= 180$.

Oder:

$\frac{a + b}{2}$ und $\frac{A + B}{2}$ müssen allezeit gleichartig seyn.

Man kann auch folgende Regel geben, um die Ung heit wegzubringen:

B ist mit b gleichartig, wenn a weder $<$ b, noch $> 180^\circ -$

Fall 8.

Gegeben.

2 Seiten und ein gegenüberſtehender Winkel, oder a, b und A.

Geſucht.

Der Winkel der von den gegebenen Seiten a, b eingeſchloſſen wird, oder C.

Formel.

$$\text{Sin B} = \frac{\text{Sin b . Sin A}}{\text{Sin a}};$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} \text{ C} = \frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} (a - b) \text{ . Cotang } \tfrac{1}{2} (A + B)}{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} (a + b)}.$$

Bleibt bey B nach Fall 7 eine Ungewiſsheit, ſo wird auch C zweifelhaft ſeyn.

Eine 2te Auflöſungsart:

$$\text{Cotang u} = \text{Tang A . Cosin b};$$

$$\text{Cosin z} = \frac{\text{Cosin u . Tang b}}{\text{Tang a}};$$

$$u \pm z = C.$$

Man ſehe die Anmerkung auf pag. 88.

Fall 9.

Gegeben.

2 Seiten und ein gegenüberſtehender Winkel, oder a, b und A.

Geſucht.

Die 3te Seite, oder c.

Formel.

$$\text{Sin B} = \frac{\text{Sin b . Sin A}}{\text{Sin a}};$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} \text{ c} = \frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} (A + B) \text{ . Tang } \tfrac{1}{2} (a + b)}{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} (A - B)}.$$

Bleibt bey B nach Fall 7 eine Ungewiſsheit, ſo wird auch c zweifelhaft.

Eine 2te Auflösungart:

$\text{Tang}\, u = \text{Cosin}\, A \,.\, \text{Tang}\, b$;

$$\text{Cosin}\, z = \frac{\text{Cosin}\, u \,.\, \text{Cosin}\, a}{\text{Cosin}\, b};$$

$u \pm z = c$.

Man sehe die folgende Anmerkung.

Anmerkung zur 2ten Auflösungsart bey Fall 8 und 9

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn die Winkel A und B, die den gegebenen Seiten a und b gegenüberstehen, gleichartig sind; im gegenseitigen Falle den Unterschied $u - z$.

Daher sind diese beyden Fälle 8 und 9 zweydeutig, wenn im Fall 7 bey B eine Zweydeutigkeit bleibt. Jedoch, wenn auch B ungewiss ist, so wird oftmals durch folgende Regel die Art $\begin{cases}\text{des Winkels C, Fall 8}\\ \text{der Seite c, Fall 9}\end{cases}$ bestimmt werden können:

Wenn die Summe $u + z > 180°$, so ist der Unterschied $u - z = \begin{cases}\text{C Fall 8}\\ \text{c Fall 9}\end{cases}$; und wenn $u - z$ negativ, oder $z > u$, ist die Summe $u + z = \begin{cases}\text{C Fall 8}\\ \text{c Fall 9}\end{cases}$.

Fall 10.

Gegeben.

2 Winkel und eine gegenüberstehende Seite, oder A, B und a

Gesucht.

Die dem andern gegebenen Winkel gegenüberstehende Seite, oder b

Formel.

$$\text{Sin}\, b = \frac{\text{Sin}\, B \,.\, \text{Sin}\, a}{\text{Sin}\, A}$$

Die gesuchte Seite b ist zweydeutig, wenn folgende Regel nicht die Art derselben bestimmt:

Ist $A + B >$ oder $<$ oder $= 180°$, so ist auch $a + b >$ oder $<$ oder $= 180°$.

Es läſst ſich auch die Regel ſo geben:

$\frac{A+B}{2}$ und $\frac{a+b}{2}$ müſſen allezeit gleichartig ſeyn.

Es dient auch folgende Regel, die Zweydeutigkeit aufzuheben:

b iſt mit B gleichartig, wenn A weder $< B$ noch $> 180° - B$ iſt.

Fall 11.

Gegeben.

2 Winkel und eine gegenüberſtehende Seite, oder A, B und a

Geſucht.

Die den gegebenen Winkeln A und B anliegende Seite, oder c

Formel.

$$\text{Sin } b = \frac{\text{Sin } B \,.\, \text{Sin } a}{\text{Sin } A};$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2}(A+B) \,.\, \text{Tang } \tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Cosin } \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

c iſt zweydeutig, wenn b nach Fall 10 es iſt.

Eine andere Auflöſung:

$$\text{Tang } u = \text{Tang } a \,.\, \text{Cosin } B;$$

$$\text{Sin } z = \frac{\text{Sin } u \,.\, \text{Tang } B}{\text{Tang } A};$$

$$u \pm z = c.$$

Man ſehe die Anmerkung pag. 90.

Fall 12.

Gegeben.

2 Winkel und eine gegenüberſtehende Seite, oder A, B und a

Geſucht.

Der dritte Winkel oder C

Formel.

$$\text{Sin } b = \frac{\text{Sin } B \,.\, \text{Sin } a}{\text{Sin } A};$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2}(a - b) \,.\, \text{Cotang } \tfrac{1}{2}(A + B)}{\text{Cosin } \tfrac{1}{2}(a + b)}.$$

C ist zweydeutig, wenn b nach Fall 10 zweydeutig bleibt.

Eine andere Auflösung:

$$\text{Cotang } u = \text{Cosin } a \,.\, \text{Tang } B;$$

$$\text{Sin } z = \frac{\text{Sin } u \,.\, \text{Cosin } A}{\text{Cosin } B};$$

$$u \pm z = C.$$

Man sehe die folgende Anmerkung.

Anmerkung zur andern Auflösung des Falles 11 und 12.

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn die gegebenen Winkel A und B gleichartig sind; im entgegengesetzten Falle den Unterschied $u - z$.

Da jedoch z durch den Sinus gefunden wird, und also zwey Werthe hat; so ist allezeit der grösste Werth von z zu verwerfen, wenn selbiger die Summe $u + z > 180°$, oder den Unterschied $u - z$ negativ giebt. Ueberhaupt:

Je nachdem a und b gleichartig oder ungleichartig sind, sind es auch u und z; oder mit andern Worten: es verhalten sich die Arten von u und z gegeneinander, wie die von a und b. Dahero sind diese zwey Fälle 11 und 12 schlechterdings zweydeutig, wenn es Fall 10 ist.

I. Das Ergänzungsdreieck dient ebenfalls

Fall 10, 11, 12, durch
Fall 7, 8, 9; und umgekehrt:

Fall 7, 8, 9, durch
Fall 10, 11, 12 zu berechnen.

II. Endlich kann die Formel bey Fall 11 und 12 für Tang $\frac{1}{2}$ c und Tang $\frac{1}{2}$ C auch beſonders gebraucht werden, *wenn zwey Seiten nebſt den beyden gegenüberſtehenden Winkeln gegeben ſind, die dritte Seite und den dritten Winkel zu finden.*

Flächeninnhalt eines Kugeldreiecks.

I. Die Fläche eines Kugeldreiecks wird gefunden, wenn man 180° von der Summe der drey Winkel ſubtrahirt, und den Reſt mit dem Halbmeſſer der Kugel multiplizirt. Oder in Zeichen ausgedrückt:

$$D = A + B + C - 180°;$$
$$x = D \cdot R$$

Bey Berechnung dieſer Gleichung iſt zu merken, daſs die beyden Faktoren D und R gleichartige Gröſsen ſeyn müſſen. Nemlich:

Verlangt man die Fläche in Graden / oder in Minuten / oder in Sekunden; } ſo nimmt man A, B, C das iſt D ebenfalls in Graden / oder in Minuten / oder in Sekunden } an, und für den Kugelhalbmeſſer } R den in Graden / oder in Minuten / oder in Sekunden ausgedrückten, d. i. R° / oder R' / oder R''; } wovon die Logarithmen folgende ſind:

$$\text{Log } R^{\circ} = 1,7581226 3$$
$$\text{Log } R' = 3,5362738 8$$
$$\text{Log } R'' = 5,3144251 3$$

Will man des Dreiecks Oberfläche $\left.\begin{array}{r}\text{in Zollen}\\ \text{oder Fuſsen}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$ haben, ſo nimmt man R

$\left.\begin{array}{c}\text{in Zollen}\\ \text{oder Fuſsen}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$ und reduzirt auch D auf $\left.\begin{array}{r}\text{Zolle}\\ \text{oder Fuſse}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$ durch die Proportion

$$R^{\circ} \text{ oder } R' \text{ oder } R'' : D^{\circ} \text{ oder } D' \text{ oder } D'' = \left.\begin{array}{c}R \text{ in Zollen}\\ \text{oder Fuſsen}\\ \text{etc.}\end{array}\right\} : \begin{array}{c}D \text{ in Zollen}\\ \text{oder Fuſsen}\\ \text{etc.}\end{array}$$

Nach dieſer Reduktion bedient man ſich allezeit der Logarithmen der natürlichen Zahlen, und ſo findet ſich auch durch ſie die Fläche x.

II. Iſt das Kugeldreieck *rechtwinklicht* oder $A = 90^{\circ}$; ſo iſt ſeine Oberfläche

$$x = (B + C - 90^{\circ}) \,.\, R$$

III. Wenn es *gleichſchenklicht* oder $A = C$ iſt, ſo wird

$$x = (2\,A + B - 180^{\circ}) \,.\, R$$

IV. Iſt es *gleichſeitig* d. i. $A = B = C$; ſo hat man

$$x = (3\,A - 180^{\circ}) \,.\, R$$

Und wenn beym gleichſeitigen Dreieck ſtatt des Winkels A, die Seite a gegeben iſt, ſo ergiebt ſich daraus A durch die Gleichung:

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,A = \frac{1}{2\,.\,\text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\,a}\,.$$

Anwendung
der vorhergehenden
trigonometriſchen Formeln
auf
Aſtronomie.

Rechtwinklichtes

Kugeldreieck, dessen Seiten, Länge, Abweichung und gerade Aufsteigung der Sonne sind.

Es bedeute in Tafel I. Figur X

λ die Länge der Sonne;
δ Abweichung der Sonne;
α gerade Aufsteigung der Sonne;
θ Schiefe der Ekliptik;
ϕ den Winkel der Ekliptik mit der Mittagsfläche;

so geben die obigen *Formeln zur Auflösung rechtwinklichter Kugeldreiecke* in *Tafel* 1 folgende 10 Gleichungen zur Vergleichung der Theile dieses Dreiecks untereinander:

I. $\sin\delta = \sin\lambda \,.\, \sin\theta$
II. $\operatorname{Cotang}\lambda = \operatorname{Cotang}\alpha \,.\, \operatorname{Cosin}\theta$
III. $\operatorname{Tang}\delta = \operatorname{Tang}\theta \,.\, \sin\alpha$
IV. $\operatorname{Cosin}\lambda = \operatorname{Cosin}\alpha \,.\, \operatorname{Cosin}\delta$
V. $\operatorname{Cotang}\phi = \operatorname{Cosin}\lambda \,.\, \operatorname{Tang}\theta$
VI. $\sin\alpha = \sin\lambda \,.\, \sin\phi$
VII. $\operatorname{Tang}\delta = \operatorname{Tang}\lambda \,.\, \operatorname{Cosin}\phi$
VIII. $\operatorname{Tang}\alpha = \operatorname{Tang}\phi \,.\, \sin\delta$
IX. $\operatorname{Cosin}\phi = \operatorname{Cosin}\alpha \,.\, \sin\theta$
X. $\operatorname{Cosin}\theta = \operatorname{Cosin}\delta \,.\, \sin\phi$

Da nun bey diesen 10 Gleichungen aus zweyen allemal das dritte gefunden wird, so kommen überhaupt 30 Aufgaben bey gegenwärtigem Dreiecke vor, die nebst den Auflösungen folgende sind:

Aufgabe	Gegeben.	Gesucht.	Formel.
1	λ, θ d. i. Länge der Sonne und Schiefe der Ekliptik.	δ d. i. Abweichung der Sonne.	$\text{Sin}\,\delta^* = \text{Sin}\,\lambda\,.\,\text{Sin}\,\theta^*$ oder $\text{Sin}\,\delta^* = \frac{1}{2}\text{Cos}(\lambda-\theta^*) - \frac{1}{2}\text{Cos}(\lambda+\theta^*)$
2	δ, θ	λ	$\text{Sin}\,\lambda = \frac{\text{Sin}\,\delta}{\text{Sin}\,\theta}$
3	λ, δ	θ	$\text{Sin}\,\theta = \frac{\text{Sin}\,\delta}{\text{Sin}\,\lambda}$
4	α, θ d. i. gerade Aufsteigung der Sonne u. Schiefe der Ekliptik.	λ d. i. Länge der Sonne.	$\text{Tang}\,\lambda = \frac{\text{Tang}\,\alpha}{\text{Cosin}\,\theta}$
5	λ, θ d. i. Länge der Sonne und Schiefe der Ekliptik.	α d. i. gerade Aufsteigung der Sonne.	$\text{Tang}\,\alpha = \text{Tang}\,\lambda\,.\,\text{Cosin}$
6	α, λ	θ	$\text{Cosin}\,\theta = \frac{\text{Tang}\,\alpha}{\text{Tang}\,\lambda}$
7	α, θ d. i. gerade Aufsteigung der Sonne u. Schiefe der Ekliptik.	δ d. i. Abweichung der Sonne.	$\text{Tang}\,\delta = \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Tang}\,\theta$
8	δ, θ	α	$\text{Sin}\,\alpha = \frac{\text{Tang}\,\delta}{\text{Tang}\,\theta}$
9	α, δ	θ	$\text{Tang}\,\theta = \frac{\text{Tang}\,\delta}{\text{Sin}\,\alpha}$
10	α, δ	λ	$\text{Cosin}\,\lambda = \text{Cosin}\,\alpha\,.\,\text{Cosin}\,\delta$
11	λ, δ	α	$\text{Cosin}\,\alpha = \frac{\text{Cosin}\,\lambda}{\text{Cosin}\,\delta}$
12	λ, α	δ	$\text{Cosin}\,\delta = \frac{\text{Cosin}\,\lambda}{\text{Cosin}\,\alpha}$

Aufgabe	Gegeben.	Gesucht.	Formel.
13	λ, θ d. i. Länge der Sonne und Schiefe der Ekliptik.	φ d. i. Winkel der Ekliptik mit der Mittags-fläche.	$\text{Cotang}\,\varphi = \text{Cosin}\,\lambda\,.\,\text{Tang}\,\theta$
14	λ, φ	θ	$\text{Tang}\,\theta = \dfrac{\text{Cotang}\,\varphi}{\text{Cosin}\,\lambda}$
15	θ, φ	λ	$\text{Cosin}\,\lambda = \dfrac{\text{Cotang}\,\varphi}{\text{Tang}\,\theta}$
16	λ, φ	α	$\text{Sin}\,\alpha = \text{Sin}\,\lambda\,.\,\text{Sin}\,\varphi$
17	α, φ	λ	$\text{Sin}\,\lambda = \dfrac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}\,\varphi}$
18	α, λ	φ	$\text{Sin}\,\varphi = \dfrac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}\,\lambda}$
19	λ, φ	δ	$\text{Tang}\,\delta = \text{Tang}\,\lambda\,.\,\text{Cosin}\,\varphi$
20	δ, φ	λ	$\text{Tang}\,\lambda = \dfrac{\text{Tang}\,\delta}{\text{Cos}\,\varphi}$
21	λ, δ	φ	$\text{Cosin}\,\varphi = \dfrac{\text{Tang}\,\delta}{\text{Tang}\,\lambda}$
22	δ, φ	α	$\text{Tang}\,\alpha = \text{Sin}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\varphi$
23	α, φ	δ	$\text{Sin}\,\delta = \dfrac{\text{Tang}\,\alpha}{\text{Tang}\,\varphi}$
24	α, δ	φ	$\text{Tang}\,\varphi = \dfrac{\text{Tang}\,\alpha}{\text{Sin}\,\delta}$
25	α, θ	φ	$\text{Cosin}\,\varphi = \text{Cosin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\theta$
26	α, φ	θ	$\text{Sin}\,\theta = \dfrac{\text{Cosin}\,\varphi}{\text{Cosin}\,\alpha}$
27	θ, φ	α	$\text{Cosin}\,\alpha = \dfrac{\text{Cosin}\,\varphi}{\text{Sin}\,\theta}$

Aufgabe	Gegeben.	Gesucht.	Formel.
28	δ, φ	θ	$\text{Cosin}\ \theta = \text{Cosin}\ \delta \,.\, \text{Sin}\ \varphi$
29	δ, θ	φ	$\text{Sin}\ \varphi = \frac{\text{Cosin}\ \theta}{\text{Cosin}\ \delta}$
30	θ, φ	δ	$\text{Cosin}\ \delta = \frac{\text{Cosin}\ \theta}{\text{Sin}\ \varphi}$

Beyſpiele.

1.

Trigonometriſche Berechnung der Abweichung der Sonne $= \delta$ aus ihrer Länge $= \lambda$ und der dermaligen Schiefe der Ekliptik $= \theta$.

Es ſey, nach Band I. dieſes Handbuchs, § 12. Seite 32:

$$\lambda = 3 Z.\ 3^\circ\ 29'\ 50''$$
$$= 93.\ 29.\ 50.$$
$$\theta = 23.\ 27.\ 58.$$

ſo iſt zufolge der vorigen erſten Aufgabe, Formel 1:

$$\text{Sin}\ \delta = \text{Sin}\ 93^\circ\ 29'\ 50''.\ \text{Sin}\ 23^\circ\ 27'\ 58''$$
$$= + \text{Cos}\ 3^\circ\ 29'\ 50''.\ \text{Sin}\ 23^\circ\ 27'\ 58''$$

alſo δ poſitiv oder die Abweichung Nördlich.

$$\log \text{Cosin}\ 3^\circ\ 29'\ 50'' = 9{,}9991905$$
$$+ \log \text{Sin}\ 23^\circ\ 27'\ 58'' - \log r = 9{,}6001084 - 10$$
$$\log \text{Sin}\ \delta = 9{,}5992989$$
$$\delta = 23^\circ\ 25'\ 11''\ \text{Nö.}$$

wie am ang. O.

Nach der zweyten Formel wird die Rechnung ſo geführt:

$$\lambda = 93^\circ\ 29'\ 50''$$
$$\theta = 23.\ 27.\ 58.$$
$$\lambda - \theta = 70.\ 1.\ 52.$$
$$\lambda + \theta = 116.\ 57.\ 48.$$
$$\text{Cos}\ (\lambda + \theta) = - \text{Cos}\ 63^\circ\ 2'\ 12''$$

Demnach

$$\text{Sin}\ \delta = \tfrac{1}{2}\ \text{Cosin}\ 70^\circ\ 1'\ 52'' + \tfrac{1}{2}\ \text{Cosin}\ 63^\circ\ 2'\ 12''$$

$\text{Cosin}\ 70^\circ\ 1'\ 52'' = 0{,}3415099$; Hälfte $= 0{,}1707549$
$\text{Cosin}\ 63^\circ\ 2'\ 12'' = 0{,}4534203$; Hälfte $= 0{,}2267101$

$$\text{Sin}\ \delta = 0{,}3974650$$
$$\delta = 23^\circ\ 25'\ 11''\ \text{Nö.}$$

wie vorher.

II.

Die gerade Aufſteigung der Sonne $= \alpha$, aus der Länge der Sonne $= \lambda$ und der Schiefe der Ekliptik $= \theta$.

Da ſich gerade Aufſteigung und Länge der Sonne allezeit in einerley Quadranten befinden, ſo braucht man hier nur ein rechtwinklichtes Kugeldreieck aufzulöſen, deſſen Seiten kleiner als 90° ſind; wenn man nemlich *ſtatt der gegebenen Länge der Sonne* $= \lambda$, ihren Abſtand, in der Ekliptik gezählet, vom nächſten Aequinoktialpunkte $= l$, in der Formel der 5ten Aufgabe gebraucht, ſo giebt ſelbige den Abſtand der Sonne, im Aequator gezählet, von ebendemſelben nächſten Aequinoktialpunkte $= a$. Je nachdem nun λ im $\left\{\begin{array}{l}\text{erſten}\\ \text{zweyten}\\ \text{dritten}\\ \text{vierten}\end{array}\right\}$ Quadranten iſt, wird

$$\alpha = \left\{\begin{array}{c} a \\ 180^\circ - a \\ 180^\circ + a \\ 360^\circ - a \end{array}\right\} \text{ ſeyn.}$$

Rechnung für das Beyſpiel, Handbuch. Band I. §. 12. Seite 32.

$\lambda = 3$ Z.	3°	29′	50″	180° =	179°	59′	60″
$= 0.$	93.	29.	50″	$-\lambda$ =	93.	29.	50.
$\theta = 0.$	23.	27.	58.	l =	86.	30.	10.

$$\log \text{Tang } l = 11,2138596$$
$$+ \log \text{Cosin } \theta = 9,9625094$$
$$\log \text{Tang } a = 11,1763690$$
$$a = 86^\circ\ 11'\ 18''$$
$$\text{ſubtrahirt von } 180^\circ = 179.\ 59.\ 60.$$
$$\alpha = 93.\ 48.\ 42.$$

III.

Den Winkel der Ekliptik mit dem Meridian $= \phi$ *vermittelſt der Länge der Sonne* $= \lambda$ *und der Schiefe der Ekliptik* $= \theta$ *zu finden*

Dient die Formel der Aufgabe 13, wobey man zu bemerken hat, daſs dieſer Winkel negativ oder *weſtlich* iſt, wenn die Sonne in den niederſteigenden Zeichen d. i. im 3, 4, 5, 6, 7, 8ten Zeichen, oder im 2ten und 3ten Quadranten der Ekliptik iſt; poſitiv oder *öſtlich* wenn λ in den 1ſten oder 4ten Quadranten fällt.

Das in meinem Handbuch, Band I. §. 10. Seite 31 vorkommende Beyſpiel wird nach erwähnter Formel ſo berechnet:

$$\lambda = 3\text{ Z. } 3^\circ\ 29'\ 50''$$
$$= 93.\ 29.\ 50.$$
$$\theta = 23.\ 27.\ 58.$$
$$\text{Cosin } \lambda = -\text{Sin } 3^\circ\ 29'\ 50''$$

folglich

$$\text{Cotang } \phi \textit{ weſtl.} = \text{Sin } 3^\circ\ 29'\ 50''\ .\ \text{Tang } \theta$$

$$\log \text{Sin } 3^\circ\ 29'\ 50'' = 8{,}7853309$$
$$+ \log \text{Tang } \theta = 9{,}6375990$$
$$\log \text{Cotang } 88^\circ\ 28'\ 59'' = 8{,}4229299$$
$$\phi = 88^\circ\ 28'\ 59'' \textit{ weſtl.}$$

Zwey Aufgaben den halben Tagebogen der Sonne oder eines Sterns zu finden.

Erste Aufgabe.

Aus Polhohe eines Orts, Abweichung der Sonne, und Horizontal-Refraktion; die Tageslänge, folglich auch Auf- und Untergang der Sonne zu berechnen.

Es sey in Tafel I. Figur XI.

H Z P R der Mittagskreis, welcher alſo durch das Zenit in Z, und durch den Pol in P geht;
H O R der Horizont;
A D T der Aequator;

ſo iſt der Bogen P S D der vierte Theil $= 90°$, eines Abweichungskreiſes, der durch die Sonne in S gelegt worden; und

Z O S ein Bogen eines Scheitelkreiſes, der gleichfalls durch die Sonne geht, welche noch um einen Bogen von etwa 32′ 54″ unter dem Horizonte ſtehen ſoll, wenn ſie des Morgens ſichtbar zu werden anfängt, weil die Horizontal-Refraktion O S beynahe ſo viel beträgt.

Demzufolge wird der Bogen A D des Aequators die Hälfte des Tages bezeichnen, und die Zeit geben, welche die Sonne braucht, ihn ſelbſt oder einen ähnlichen Bogen eines ſeiner Parallelkreiſe, von ihrem Aufgange an bis zu ihrem Stande im Mittagskreiſe zu durchlaufen.

Dieſer Bogen des Aequators oder eines Parallels heiſst bekanntlich der *halbe Tagebogen.*

Es kommt alſo alles darauf an, dieſen halben Tagebogen A D zu finden; er iſt nemlich das Maas des Winkels A P D oder Z P S, deſſen Scheitel oder Spitze im Pole iſt.

Zu dem Ende betrachte man das Kugeldreieck Z P S, deſſen drey Seiten nach dem Innhalte der Aufgabe bekannt ſind, nemlich

1) P Z; dieſer Bogen iſt die Ergänzung der Polhöhe P R zu 90°, weil der Bogen Z P R, vom Zenit bis zum Horizont, ein Quadrant iſt.

2) P S; dies iſt die Ergänzung der Abweichung D S der Sonne, weil der Bogen P D zwiſchen dem Pole und Aequator, 90° beträgt. Hierbey wird aber der *Nordpol über* dem Horizonte angenommen; wenn nun in dieſem Fall die Sonne eine Abweichung nach dem unſichtbaren oder Südpole d. i. eine Südliche Abweichung hätte, ſo würde, ſtatt des vorigen P S, der Bogen P s zu nehmen ſeyn, welcher die Summe von 90° und der Abweichung iſt.

3) Z S; dieſe Seite iſt die Summe von 90° (des zwiſchen dem Zenit und Horizonte enthaltenen Bogens Z O des Höhenkreiſes) und der Horizontal-Refraktion O S.

Nennt man nun:

	z. B.
die Nördliche Polhöhe $= \varepsilon$	$= 49°$
die Abweichung der Sonne $= \delta \begin{cases} \text{Nö.} + \\ \text{Sü.} - \end{cases}$	$= 20° \begin{cases} \text{Nö.} \\ \text{Sü.} \end{cases}$
die Horizontal-Refraktion $= \varrho$	$= 0°\ 32'\ 54''$

ſo iſt

$PZ = 90° - \varepsilon$	$= 41°$
$PS = 90° - \delta$	$= \begin{cases} 70° \text{ bey Nö. Abw.} \\ 110 \text{ bey Sü. Abw.} \end{cases}$
$ZS = 90° + \varrho$	$= 90°\ 32'\ 54''$

Kennt man aber die drey Seiten eines Kugeldreiecks, ſo laſſen ſich daraus die Winkel finden, und die hieher gehörigen Rechnungsarten, num. 1) 2) und 3) aus Fall 1 der *Auflöſung ſchiefwinklichter Kugeldreiecke* will ich nunmehro auf die Aufſuchung des Winkels Z P S oder A P D anwenden, welcher mit dem Bogen A D einerley iſt. Wird alsdann A D in Zeit verwandelt, 15° auf eine Stunde gerechnet, ſo bekömmt man die halbe Tageslänge, mithin Auf- und Untergang der Sonne.

Was am ang. O. x	a	b	c	Man ſehe hiezu Tafel I. Figur XII.
iſt gegenwärtig ZPS	ZS =	ZP =	SP =	
	$90° + \varrho$	$90° - \varepsilon$	$90° - \delta$	

Setzt man daher dieſe Werthe für a, b, c in die Formeln, ſo geben ſelbige nach gehöriger Reduktion, $\frac{1}{2}$ x oder $\frac{1}{2}$ A D d. i. die Hälfte des geſuchten halben Tagebogens, wie in folgender Tafel zu ſehen iſt.

Tafel zur Erften Aufgabe.

Gegeben.

ε, δ, ϱ d. i. Nördliche Polhöhe, Abweichung der Sonne oder eines Sterns { Nö. + * / Sü. — } und Horizontal-Refraktion.

* Nemlich wenn die Abweichung Nördlich ist, fo ift δ pofitiv; wenn fie aber Südlich ift, wird δ negativ angenommen.

Gefucht.

x oder der halbe Tagebogen.

Formel.

$$u = \frac{90^\circ - \delta - \varepsilon}{2}$$

$$1)\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}x = r\left(\frac{\text{Sin}\ (u + \tfrac{1}{2}\varrho + \varepsilon)\ .\ \text{Sin}\ (u + \tfrac{1}{2}\varrho + \delta)}{\text{Cosin}\ \varepsilon\ .\ \text{Cosin}\ \delta}\right)$$

$$2)\ \text{Cosin}\ \tfrac{1}{2}x = r\left(\frac{\text{Cosin}\ (u + \tfrac{1}{2}\varrho)\ .\ \text{Sin}\ (u - \tfrac{1}{2}\varrho)}{\text{Cosin}\ \varepsilon\ .\ \text{Cosin}\ \delta}\right)$$

$$3)\ \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}x = r\left(\frac{\text{Sin}\ (u + \tfrac{1}{2}\varrho + \varepsilon)\ .\ \text{Sin}\ (u + \tfrac{1}{2}\varrho + \delta)}{\text{Cosin}\ (u + \tfrac{1}{2}\varrho)\ .\ \text{Sin}\ (u - \tfrac{1}{2}\varrho)}\right)$$

Anmerkung.

Eines Verfahrens wie bey dieſer erſten Aufgabe pflegt man ſich auch zu bedienen, die wahre Zeit für eine gewiſſe bekannte Sonnenhöhe zu beſtimmen, wobey man ebenfalls die Abweichung der Sonne und die Breite des Orts als bekannt annimmt:

Denn in dem ſchiefwinklichten Kugeldreieck Z P S, Tafel II. Figur XIII. iſt die Seite Z S welche nunmehro kleiner als 90° oder als Z O iſt, die Ergänzung der Sonnenhöhe S O = η zu 90°; alſo kennt man die drey Seiten des Dreiecks Z P S, nemlich

$$\begin{aligned} PZ &= 90^\circ - \varepsilon \\ PS &= 90^\circ - \delta \begin{cases} \text{Nö. Abw.} + \\ \text{Sü. Abw.} - \end{cases} \\ ZS &= 90^\circ - \eta \end{aligned}$$

woraus ſich der Winkel am Pole, Z P S, ſo wie vorher finden läſst. Es iſt aber das Maas dieſes Winkels der Bogen A D des Aequators, der in Stunden, Minuten und Sekunden verwandelt, 15° auf 1 St. gerechnet, angiebt: wieviel Zeit von dem Augenblicke an für welchen man die Höhe der Sonne weis, bis zum wahren Mittage verflieſst, wenn man für den Vormittag rechnet; oder wie lange es dauert vom Mittage bis zur Zeit der gegebenen Sonnenhöhe, wenn es Nachmittage iſt. Doch hievon in der Folge ausführlicher.

Uebrigens kann man dieſe Aufgabe, den Stundenwinkel Z P S = x für eine gemeſſene wahre Höhe η zu finden, auch nach den vorhergehenden drey Formeln, welche den halben Tagebogen mit Betrachtung der Horizontal-Refraktion geben, auflöſen, wenn man darin $\varrho = -\eta$ ſetzt. Dadurch verwandeln ſich die beyden erſten Formeln zu gegenwärtigem Zweck in folgende:

$$u = \frac{90^\circ - \delta - \varepsilon}{2}$$

$$1)\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2} x = \surd\left(\frac{\text{Sin}\,(u - \frac{1}{2}\eta + \varepsilon)\,.\,\text{Sin}\,(u - \frac{1}{2}\eta + \delta)}{\text{Cosin}\ \varepsilon\,.\ \text{Cosin}\ \delta}\right)$$

$$2)\ \text{Cosin}\ \tfrac{1}{2} x = \surd\left(\frac{\text{Cosin}\,(u - \frac{1}{2}\eta)\,.\,\text{Sin}\,(u + \frac{1}{2}\eta)}{\text{Cosin}\ \varepsilon\,.\ \text{Cosin}\ \delta}\right)$$

Rechnungsbeyspiele zu der Aufgabe den halben Tagebogen mit Betrachtung der Horizontal-Refraktion zu finden.

Beyspiel 1.

$\varepsilon = 49^\circ\ 0'\ 0''$
$\delta = 20^\circ$ Nördlich, d. i. $= +20^\circ$
$\varrho = 0^\circ\ 32'\ 54''$

Rechnung nach Formel 1.

$90^\circ =$	$90^\circ\ 0'\ 0''$
$-\delta =$	$-20.\ 0.\ 0.$
$90^\circ - \delta =$	$70.\ 0.\ 0.$
$-\varepsilon =$	$49.\ 0.\ 0.$
$90^\circ - \delta - \varepsilon =$	$21.\ 0.\ 0.$
Hälfte oder $u =$	$10.\ 30.\ 0.$
$+\frac{1}{2}\varrho =$	$0.\ 16.\ 27.$
$+\varepsilon =$	$49.\ 0.\ 0.$
$u + \frac{1}{2}\varrho + \varepsilon =$	$59.\ 46.\ 27.$
$u + \frac{1}{2}\varrho =$	$10.\ 46.\ 27.$
$+\delta =$	$+20.\ 0.\ 0.$
$u + \frac{1}{2}\varrho + \delta =$	$30.\ 46.\ 27.$
$20 + \log \text{Sin}\,(u + \frac{1}{2}\varrho + \varepsilon) =$	$29{,}9365378$
$+\log \text{Sin}\,(u + \frac{1}{2}\varrho + \delta) =$	$9{,}7089777$
Summe $=$	$39{,}6455155$
$-\log \text{Cosin}\,\varepsilon =$	$9{,}8169429$
Rest $=$	$29{,}8285726$
$-\log \text{Cosin}\,\delta =$	$9{,}9729858$
$2 . \log \text{Sin}\,\frac{1}{2}x =$	$19{,}8555868$
$\log \text{Sin}\,\frac{1}{2}x =$	$9{,}9277934$
$\frac{1}{2}x =$	$57^\circ\ 52'\ 5''$
$x =$	$115.\ 44.\ 10.$
$=$	7 St. 42. 56. *der gesuchte halbe Tagebogen.*

Bey der Sonne giebt selbiger sogleich ihren Untergang um 7 Uhr 42′ 56″; der Aufgang wird erhalten, wenn

man diese 7 St. 42′ 56″ von 12 St. 0′ 0″ subtrahirt, also um 4 Uhr 17′ 4″; 2 x oder 15 St. 25′ 52″ ist die Tageslänge.

Bey einem Sterne aber $\left\{\begin{matrix}\text{subtrahirt}\\ \text{addirt}\end{matrix}\right\}$ man den gefundenen halben Tagebogen $\left\{\begin{matrix}\text{von}\\ \text{zu}\end{matrix}\right\}$ der Culminationszeit des Sterns; $\left\{\begin{matrix}\text{der Rest}\\ \text{die Summe}\end{matrix}\right\}$ giebt den $\left\{\begin{matrix}\text{Aufgang}\\ \text{Untergang}\end{matrix}\right\}$ des Sterns.

Rechnung nach Formel 2.

$$u = 10^\circ\ 30'\ 0''$$
$$\tfrac{1}{2}\varrho = 0.\ 16.\ 27.$$

$$u + \tfrac{1}{2}\varrho = 10.\ 46.\ 27.$$
$$u - \tfrac{1}{2}\varrho = 10.\ 13.\ 33.$$

$$20 + \log \text{Cosin}\,(u + \tfrac{1}{2}\varrho) = 29{,}9922758$$
$$+ \log \text{Sin}\,(u - \tfrac{1}{2}\varrho) = 9{,}2492680$$

$$\text{Summe} = 39{,}2415438$$
$$- \log \text{Cosin}\,\varepsilon = 9{,}8169429$$

$$\text{Rest} = 29{,}4246009$$
$$- \log \text{Cosin}\,\delta = 9{,}9729858$$

$$2 . \log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}x = 19{,}4516151$$
$$\log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}x = 9{,}7258075$$
$$\tfrac{1}{2}x = 57^\circ\ 52'\ 5''$$

wie vorher.

Beyspiel 2.

$\varepsilon = 49^\circ\ 0'\ 0''$
$\delta = 20.$ Südlich $= -20^\circ$
$\varrho = 0.\ 32.\ 54.$

Rechnung nach Formel I.

$90^\circ =$	90°	$0'$	$0''$
$-\delta = +$	20.	0.	0.
$90^\circ - \delta =$	110.	0.	0.
$-\varepsilon =$	49.	0.	0.
$90^\circ - \delta - \varepsilon =$	61.	0.	0.
$u =$	30.	30.	0.
$+\frac{1}{2}\varrho =$	0.	16.	27.
$+\varepsilon =$	49.	0.	0.
$u + \frac{1}{2}\varrho + \varepsilon =$	79.	46.	27.
$u + \frac{1}{2}\varrho =$	30.	46.	27.
$+\delta = -$	20.	0.	0.
$u + \frac{1}{2}\varrho + \delta =$	10.	46.	27.

$20 + \log \text{Sin}(u + \frac{1}{2}\varrho + \varepsilon) =$	29,9930461
$+\log \text{Sin}(u + \frac{1}{2}\varrho + \delta) =$	9,2716985
Summe $=$	39,2647446
$-\log \text{Cosin}\ \varepsilon =$	9,8169429
Rest $=$	29,4478017
$-\log \text{Cosin}\ \delta =$	9,9729858
$2 . \log \text{Sin} \frac{1}{2} x =$	19,4748159
$\log \text{Sin} \frac{1}{2} x =$	9,7374079
$\frac{1}{2} x =$	$33^\circ\ 6'\ 42''$
$x =$	66. 13. 24.
$66^\circ =$	4 St. 24. 0.
$13' =$	0 0. 52.
$24'' =$	0 0. 1, 6.
$x =$	4. 24. 53,6.

Rechnung nach Formel 2.

$$u = 30^\circ\ 30'\ 0''$$
$$\tfrac{1}{2}\varrho = 0.\ 16.\ 27.$$
$$u + \tfrac{1}{2}\varrho = 30.\ 46.\ 27.$$
$$u - \tfrac{1}{2}\varrho = 30.\ 13.\ 33.$$

$$20 + \log \text{Cosin}\,(u + \tfrac{1}{2}\varrho) = 29,9340896$$
$$+ \log \text{Sin}\,(u - \tfrac{1}{2}\varrho) = 9,7019215$$
$$\text{Summe} = 39,6360111$$
$$- \log \text{Cosin}\,\varepsilon = 9,8169429$$
$$\text{Reſt} = 29,8190682$$
$$- \log \text{Cosin}\,\delta = 9,9729858$$
$$2.\ \log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}x = 19,8460824$$
$$\log \text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}x = 9,9230412$$
$$\tfrac{1}{2}x = 33^\circ\ 6'\ 42''$$

eben ſo wie bey der vorigen Rechnung.

Zweyte Aufgabe.

Es ist die Polhöhe oder Breite eines Orts nebst der Abweichung der Sonne gegeben; man verlangt die Tageslänge ohne dabey die Verbesserung derselben durch die Horizontal-Refraktion in Betrachtung zu ziehen.

I. Hier wird angenommen, daſs der Tag erst anfängt wenn die Sonne gerade im Horizonte steht, daher treffen die beyden Bogen PS und ZS der vorigen Aufgabe in einem Punkte S des Horizonts zusammen, wie Tafel II. Figur XIV. zeigt. Stellt man sich nun den Bogen eines gröſsten Kreises aus dem Punkte S der Sonne, senkrecht auf den Meridian gezogen, vor, so wird selbiger kein anderer als das Stück SR des Horizonts seyn können, weil der Horizont allezeit auf den Meridian senkrecht steht. Auch in dieser Aufgabe nehme ich anfangs die Abweichung der Sonne nach unserm Nordpole zu oder Nördlich an.

II. Solchergestalt hat man ein rechtwinklichtes Kugeldreieck SRP, in welchem

das Perpendikel $PR =$ der Polhöhe ε

und die Hypotenuse $PS = 90° - \delta$ oder

dem Complement der Abweichung der Sonne bekannt, und in R der rechte Winkel ist. Hieraus läſst sich also einer von den schiefen Winkeln, d. i. hier der dem gegebenen Perpendikel anliegende Winkel SPR nach den *Formeln für die Auflösung rechtwinklichter Kugeldreiecke* (Formel 5) finden. Aber

$$ZPS + SPR = 180°$$

weil das Maas des Winkels ZPS der Bogen AD des Aequators, dasjenige des Winkels SPR der Bogen DT ist, und $AD + DT = AT$ oder $180°$ beträgt. Folglich ergiebt sich der zu findende Winkel am Pol

$$ZPS = 180° - SPR$$

$$= AD \text{ oder dem halben Tagebogen}$$

$$= \tau$$

welcher letztere in Zeit, 15° auf 1 Stunde gerechnet, verwandelt, die halbe Tageslänge, folglich auch den Auf- und Untergang der Sonne ohne Betracht der Strahlenbrechung giebt.

III. Es wird aber die hiehergehörige Formel, für gegenwärtigen Fall so eingerichtet:

Was Tafel 1. Formel 5: a	c	B
ist hier: PS	PR	SPR
$= 90° - \delta$	$= \varepsilon$	$= 180° - \tau$

Also

1) $\text{Cosin}\,(180° - \tau) = \text{Tang}\,\varepsilon \,.\, \text{Tang}\,\delta$

wenn die Abweichung der Sonne Nördlich ist.

Oder auch aus Tafel 4. Formel 5:

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(180° - \tau) = r\left(\frac{\text{Sin}\,(90° - \delta - \varepsilon)}{\text{Sin}\,(90° - \delta + \varepsilon)}\right)$$

und hieraus folgt eine zweyte Formel für den halben Tagebogen

2) $\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,\tau = r\left(\frac{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}\right)$

wenn die Abweichung der Sonne Nördlich ist.

IV. Hat bey uns die Sonne eine Südliche Abweichung, so ist $Ps = Pd + ds$ oder $90° + \delta$ d. i. der Summe von 90° und der Abweichung der Sonne; alsdann wird aber das Perpendikel, welches kleiner als 90° ist, sH, und das aufzulösende rechtwinklichte Kugeldreieck sHP seyn. In diesem kennt man das Perpendikel

$$PH = 180° - PR$$
$$= 180° - \varepsilon$$

und die Hypotenuse $Ps = 90° + \delta$;

der rechte Winkel befindet sich in H.

Also läst sich hieraus der dem gegebenen Perpendikel PH anliegende Winkel sPH auf eben die Art, wie vorhin, finden. Es ist aber sPH mit dem Bogen Ad, der dem gesuchten halben Tagebogen τ gleich ist, einerley. Was demnach in

Formel 5 der Tafel 1 oder 4: a	c	B
ist hier: Ps	PH	sPH
$= 90° + \delta$	$= 180° - \varepsilon$	$= \tau$

Folglich

3) $\text{Cosin } \tau = \text{Tang } \varepsilon . \text{ Tang } \delta$

wenn die Abweichung der Sonne Südlich ist.

Oder

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Sin } (90° + \delta - (180° - \varepsilon))}{\text{Sin } (90° + \delta + (180° - \varepsilon))} \right)$$

welches folgende andere Formel giebt:

4) $$\text{Tang } \tfrac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\varepsilon + \delta)}{\text{Cosin } (\varepsilon - \delta)} \right)$$

wenn die Abweichung Südlich ist.

V. Allein man kann in diesem Falle auch das vorige Dreieck SPR beybehalten, welches aber nunmehro sich in sPR verwandelt, so daſs man Ps d. i. $90° + \delta$ statt PS oder $90° - \delta$ gebraucht. Solchergestalt findet man in dem rechtwinklichten Kugeldreieck sPR aus Ps oder $90° + \delta$ und PR oder ε, den Winkel sPR = dT der von $180°$ abgezogen, den gesuchten Bogen Ad $= \tau$ übrig läſst. Endlich wird τ in Zeit eben so wie vorher verwandelt. Also

statt: a	c	B
gesetzt: Ps	PR	sPR
$= 90° + \delta$	$= \varepsilon$	$= 180° - \tau$

erhält man

$$\text{Cosin } (180° - \tau) = \text{Tang } \varepsilon . \text{ Cotang } (90° + \delta)$$

das ist

$\text{Cosin } \tau = \text{Tang } \varepsilon . \text{ Tang } \delta$, wie vorher bey 3).

Oder

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} (180° - \tau) = r \left(\frac{\text{Sin } (90° + \delta - \varepsilon)}{\text{Sin } (90° + \delta + \varepsilon)} \right)$$

das ist

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} \tau = r \left(\frac{\text{Cosin } (\varepsilon + \delta)}{\text{Cosin } (\varepsilon - \delta)} \right)$$

ebenfalls wie vorhero bey 4).

VI. Man kann gegenwärtige Aufgabe auch durch Betrachtung des Dreiecks ZPS für Nördliche Abweichungen, oder ZPs für Südliche, *in welchem eine Seite* ZS, oder Zs, $= 90°$ *ist*, nach der Art wie im vorhergehenden, Seite 66, dergleichen Kugeldreiecke zu behandeln gelehrt worden ist, auflösen, und zwar folgendergestalt: Hiezu sehe man Tafel II. Figur XV.

ZS $= 90°$	Zs $= 90°$
ZP $= 90° - \varepsilon$	ZP $= 90° - \varepsilon$
PS $= 90° - \delta$	Ps $= 90° + \delta$
und man sucht ZPS $= \tau$	ZPs $= \tau$

Was hier ZS (Zs)	ZP	PS (Ps)	ZPS (ZPs)
ist Taf. I. Fig. V. Seite 66 A	B	C	a

Folglich:

Gegeben Fig. V.	*Gesucht Fig. V.*	*Verwandelt in Fig. IV.*
A $= 90°$		A $= 90°$
B $= 90° - \varepsilon$	a $= \tau$	B $= 90° + \varepsilon$
C $= 90° \mp \delta$ { Nö. Abw. / Sü. —		C $= 90° \pm \delta$ { Nö. Abw. / Sü. Abw.
		a $= 180° - \tau$

Dies ist nunmehro der Fall aus den beyden Winkeln eines rechtwinklichten Kugeldreiecks die Hypotenuse zu berechnen, wozu in Tafel 1 oder 4, die Formel 15 auf Seite 51 und 57 dient. Die eine giebt

$$\text{Cosin}\,(180^\circ - \tau) = \text{Cot}\,(90^\circ + \varepsilon)\,.\,\text{Cot}\,(90^\circ \pm \delta)$$

d. i. für Nördliche Abweichungen

$$\text{Cosin}\,(180^\circ - \tau) = \text{Tang}\,\varepsilon\,.\,\text{Tang}\,\delta$$

wie in III bey 1). *Seite* 112

und für Südliche

$$\text{Cosin}\,(180^\circ - \tau) = -\,\text{Tang}\,\varepsilon\,.\,\text{Tang}\,\delta$$

welches soviel ist als

$$\text{Cosin}\,\tau = \text{Tang}\,\varepsilon\,.\,\text{Tang}\,\delta$$

wie in IV bey 3). *Seite* 113

Die andere Formel aus Tafel 4 giebt

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(180^\circ - \tau) = \sqrt{\left(-\frac{\text{Cos}\,(90^\circ + \varepsilon + (90^\circ \pm \delta))}{\text{Cos}\,(90^\circ + \varepsilon - (90^\circ \pm \delta))}\right)}$$

d. i. für Nördliche Abweichung

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(180^\circ - \tau) = \sqrt{\left(\frac{-\,\text{Cosin}\,(180^\circ + \varepsilon + \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}\right)}$$

oder

$$\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,\tau = \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}\right)}$$

also auch

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,\tau = \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}\right)}$$

wie in III bey 2). *Seite* 112

und für Südliche Abweichung

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(180^\circ - \tau) = \sqrt{\left(\frac{-\,\text{Cosin}\,(180^\circ + \varepsilon - \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}\right)}$$

oder

$$\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,\tau = \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}\right)}$$

woraus sich ergiebt

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,\tau = \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}\right)}$$

wie in IV bey 4). *Seite* 113

Man trift alſo auf dieſem Wege, durch das Supplement-Dreieck von ZPS oder ZPs, auf die nemlichen Formeln wie vorher.

VII. Es läſst ſich dieſe zweyte Aufgabe auf eine noch andere Art auflöſen, nemlich durch Hülfe des Kugeldreiecks CDS (Cds) welches in D (d) rechtwinklicht iſt, weil der Abweichungskreis PD (Pd) auf den Aequator ACT ſenkrecht ſteht. In dieſem Dreieck kennt man auſser dem rechten Winkel in D (d) folgende zwey Stücke:

1) das Perpendikel DS (ds) welches die Abweichung der Sonne iſt, $= \delta$;
2) den gegenüberſtehenden Winkel SCD (sCd) $=$ ACH $=$ der Aequatorhöhe AH $= 90^\circ - \varepsilon$.

Hieraus läſst ſich alſo das andere Perpendikel CD (Cd) $= u$, welches ein Bogen vom Aequator und $< 90^\circ$ iſt, *nach Tafel 1 oder 4, Formel 8*, finden, wenn man

anſtatt	c	C	b
ſetzt	δ	$90^\circ - \varepsilon$	u

dies giebt nach Tafel 1, Formel 8, die Gleichung

5) $\text{Sin}\, u = \text{Tang}\, \varepsilon \,.\, \text{Tang}\, \delta$

oder nach Tafel 4, Formel 8:

6) $\text{Tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} u) = \sqrt{\left(\dfrac{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}\right)}$

Dieſer Bogen u (wenn in beyden Formeln die Abweichung δ, ſie mag Nördlich oder Südlich ſeyn, als *poſitiv* angeſetzt wird) giebt aber an, um wie viel die halbe Tageslänge $\left\{\begin{matrix}\text{gröſser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als 6 Stunden iſt, bey $\left\{\begin{matrix}\text{Nördlicher}\\ \text{Südlicher}\end{matrix}\right\}$ Abweichung der Sonne. Es gehören

nemlich 6 Stunden dem Bogen oder Quadranten A C zu. Folglich wird der halbe Tagebogen

$$\tau = 90^\circ + u \qquad \text{oder } \tau = 90^\circ - u$$

d. i. $\tau = 6$ St. $+ u$ in Zeit oder $\tau = 6$ St. $- u$ in Zeit

Der Bogen CD (Cd) $= u$ heifst die Afcenfional-Differenz. Man findet alfo hier den halben Tagebogen eines *Geftirns vermittelft der Afcenfional-Differenz* deffelben. Denn ftatt der Sonne kann auch ein Stern gegeben feyn, und die Aufgabe läfst fich für felbigen eben fo auflöfen.

VIII. Nachfolgende Tafel ftellt die gegenwärtig gefundenen Auflöfungen im Zufammenhange dar.

Tafel zur Zweyten Aufgabe.

Gegeben.

ε, δ d. i. Nördliche Polhöhe nebst Abweichung der Sonne oder eines Sterns.

Gesucht.

τ oder der halbe Tagebogen, ohne Rücksicht auf die Horizontal-Refraktion.

Formeln.

Fall 1) Wenn die Abweichung δ Nördlich ist:
$$\text{Cosin}\,(180^\circ - \tau) = \text{Tang}\,\varepsilon.\ \text{Tang}\,\delta$$

Fall 2) Wenn die Abweichung Südlich ist:
$$\text{Cosin}\,\tau = \text{Tang}\,\varepsilon.\ \text{Tang}\,\delta$$

In beyden Fällen wird in der Rechnung δ als *positiv* angesetzt. Aber in folgender Formel

$$3)\ \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,\tau = \sqrt{\frac{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}}$$

ist δ für *Nördliche* Abweichungen *positiv*, und für *Südliche negativ* anzunehmen.

$$4)\ \text{Sin}\,u = \text{Tang}\,\varepsilon.\ \text{Tang}\,\delta$$

oder

$$5)\ \text{Tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,u) = \sqrt{\frac{\text{Cosin}\,(\varepsilon - \delta)}{\text{Cosin}\,(\varepsilon + \delta)}}$$

In diesen beyden Formeln 4) und 5) wird δ allezeit *positiv* angenommen, es mag die Abweichung Nördlich oder Südlich seyn. Hat man aber aus einer von ihnen u gefunden, so ist

$$\tau = 90^\circ \pm u$$

wo + bey Nördlicher Abweichung, und — bey Südlicher gebraucht wird.

Beyspiele zu diesen Formeln.

$\varepsilon = 49^\circ$ Nördlich;
$\delta = 20^\circ$ Nördlich und Südlich.

Rechnung nach Fall 1 und 2.

$$\begin{array}{rl} \text{Log Tang } \varepsilon = & 10{,}0608369 \\ + \text{log Tang } \delta = & 9{,}5610659 \\ \hline \text{log Cosin } 65^\circ\ 14'\ 51'' = & 9{,}6219028 \end{array}$$

$180^\circ - \tau = 65^\circ\ 14'\ 51''$ subtrahirt von $180^\circ = 179.\ 59.\ 60.$ $\tau = 114.\ 45.\ 9$ $= 7$ St. $39.\ 0.6.$ bey Nördlicher Abweichung.	$\tau = 65^\circ\ 14'\ 51''$ $= 4$ St. $20.\ 59{,}4.$ bey Südlicher Abweichung.

Rechnung nach Formel 3.

Für Nördliche Abweichung.

$\varepsilon = 49^\circ$ $-\delta = -20.$ $\varepsilon - \delta = 29.$	$\varepsilon = 49^\circ$ $+\delta = +20.$ $\varepsilon + \delta = 69.$

$$\begin{array}{rl} 20 + \text{log Cosin } (\varepsilon - \delta) = & 29{,}9418193 \\ - \text{log Cosin } (\varepsilon + \delta) = & 9{,}5543292 \\ \hline 2 \cdot \text{log Tang } \tfrac{1}{2}\tau = & 20{,}3874901 \\ \text{log Tang } \tfrac{1}{2}\tau = & 10{,}1937450 \\ \tfrac{1}{2}\tau = & 57^\circ\ 22'\ 34{,}5'' \\ \tau = & 114.\ 45.\ 9. \end{array}$$

wie vorhin nach Fall 1.

Fur Südliche Abweichung.

$\varepsilon = 49^\circ$	$\varepsilon = 49^\circ$
$-\delta = +20.$	$+\delta = -20.$
$\varepsilon - \delta = 69.$	$\varepsilon + \delta = 29.$

$$20 + \log \mathrm{Cosin}\,(\varepsilon - \delta) = 29{,}5543292$$
$$-\log \mathrm{Cosin}\,(\varepsilon + \delta) = 9{,}9418193$$

$$2.\ \log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\tau = 19{,}6125099$$
$$\log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\tau = 9{,}8062550$$
$$\tfrac{1}{2}\tau = 32^\circ\ 37'\ 25{,}5''$$
$$\tau = 65.\ 14.\ 51.$$

eben so wie nach Fall 2.

Rechnung nach Formel 4 und 5.

Aus der Rechnung nach Fall 1 hat man:	Aus der Rechnung nach Formel 3 ist:
$\log \mathrm{Sin}\, u = 9{,}6219028$	$\log \mathrm{Tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) = 10{,}1937456$
$u = 24^\circ\ 45'\ 9''$	$45^\circ + \tfrac{1}{2}u = 57^\circ\ 22'\ 34{,}5''$
	$-45^\circ = 45.\ 0.\ 0$
	$\tfrac{1}{2}u = 12.22.\ 34{,}5.$
	$u = 24.45.\ 9.$

$$90^\circ = 90^\circ\ 0'\ 0''$$
$$\pm u = 24.\ 45.\ 9.$$

$90^\circ + u = \tau = 114.\ 45.\ 9.$ Für die Nördliche Abweichung von 20°.

$90^\circ - u = \tau = 65.\ 14.\ 51.$ Für die Südliche Abweichung von 20°.

60 mögliche Fälle

nebst ihren Auflösungen

im

schiefwinklichten Kugeldreieck

dessen Seiten die Complemente der Nördlichen Polhöhe ε, der Abweichung δ, und der Höhe η eines Sterns, und in dessen Winkeln Supplement des Azimuths α, der Stundenwinkel τ, und parallaktischer Winkel σ dieses Sterns sind.

Man sehe Tafel II.
Fig. XVI.

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung
1. η, δ, τ	ε	9	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \tau$ $c = 90^\circ - \varepsilon$
2. η, δ, α	ε	9	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = 180^\circ - \alpha$ $c = 90^\circ - \varepsilon$
3. η, δ, σ	ε	4	$a = 90^\circ - \eta$ od. $90^\circ - \delta$ die gröſsere Seite $c = 90^\circ - \delta$ od. $90^\circ - \eta$ die kleinere Seite $B = \sigma$ $b = 90^\circ - \varepsilon$
4. η, τ, σ	ε	10	$A = \tau$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$
5. δ, α, σ	ε	10	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$
6. η, α, τ	ε	11	$A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \eta$ $c = 90^\circ - \varepsilon$
7. δ, α, τ	ε	11	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \delta$ $c = 90^\circ - \varepsilon$

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung.
8. δ, τ, σ	ε	5	X = σ C = τ b = 90° — δ x = 90° — ε
9. η, α, σ	ε	5	X = σ C = 180° — α b = 90° — η x = 90° — ε
10. α, τ, σ	ε	2	A = σ B = 180° — α C = τ x = 90° — ε
11. ε, δ, τ	η	4	a = 90° — ε od. 90° — δ die gröſsere Seite c = 90° — δ od. 90° — ε die kleinere Seite B = τ b = 90° — η
12. ε, δ, α	η	9	a = 90° — δ b = 90° — ε A = 180° — α c = 90° — η
13. ε, δ, σ	η	9	a = 90° — ε b = 90° — δ A = σ c = 90° — η
14. δ, α, τ	η	10	A = 180° — α B = τ a = 90° — δ b = 90° — η

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung.
15. ε, τ, σ	η	10	A = σ B = τ a = 90° — ε b = 90° — η
16. ε, α, τ	η	5	X = τ C = 180° — α b = 90° — ε x = 90° — η
17. δ, τ, σ	η	5	X = τ C = σ b = 90° — δ x = 90° — η
18. δ, α, σ	η	11	A = 180° — α B = σ a = 90° — δ c = 90° — η
19. ε, α, σ	η	11	A = σ B = 180° — α a = 90° — ε c = 90° — η
20. α, τ, σ	η	2	A = τ B = 180° — α C = σ x = 90° — η
21. ε, η, τ	δ	9	a = 90° — η b = 90° — ε A = τ c = 90° — δ

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung.
22. $\varepsilon, \eta, \alpha$	δ	4	$a = 90^\circ - \varepsilon$ od. $90^\circ - \eta$ die grösere Seite $c = 90^\circ - \eta$ od. $90^\circ - \varepsilon$ die kleinere Seite $B = 180^\circ - \alpha$ $b = 90^\circ - \delta$
23. $\varepsilon, \eta, \sigma$	δ	9	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = \sigma$ $c = 90^\circ - \delta$
24. η, α, τ	δ	10	$A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$
25. $\varepsilon, \alpha, \sigma$	δ	10	$A = \sigma$ $B = 180^\circ - \alpha$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \delta$
26. $\varepsilon, \alpha, \tau$	δ	5	$X = 180^\circ - \alpha$ $C = \tau$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $x = 90^\circ - \delta$
27. η, τ, σ	δ	11	$A = \tau$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \eta$ $c = 90^\circ - \delta$
28. $\varepsilon, \tau, \sigma$	δ	11	$A = \sigma$ $B = \tau$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $c = 90^\circ - \delta$

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung.
29. η, α, σ	δ	5	$X = 180^\circ - \alpha$ $C = \sigma$ $b = 90^\circ - \eta$ $x = 90^\circ - \delta$
30. α, τ, σ	δ	2	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \tau$ $C = \sigma$ $x = 90^\circ - \delta$
31. ε, η, δ	α	1	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $c = 90^\circ - \eta$ $x = 180^\circ - \alpha$
32. η, δ, τ	α	7	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \tau$ $B = 180^\circ - \alpha$
33. ε, δ, σ	α	7	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \sigma$ $B = 180^\circ - \alpha$
34. ε, η, τ	α	8	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = \tau$ $C = 180^\circ - \alpha$
35. ε, δ, τ	α	3	$x = 90^\circ - \delta$ $a = 90^\circ - \varepsilon$ $C = \tau$ $X = 180^\circ - \alpha$

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung.
36. η, δ, σ	α	3	$x = 90° - \delta$ $a = 90° - \eta$ $C = \sigma$ $X = 180° - \alpha$
37. ε, η, σ	α	8	$a = 90° - \varepsilon$ $b = 90° - \eta$ $A = \sigma$ $C = 180° - \alpha$
38. η, τ, σ	α	12	$A = \tau$ $B = \sigma$ $a = 90° - \eta$ $C = 180° - \alpha$
39. ε, τ, σ	α	12	$A = \sigma$ $B = \tau$ $a = 90° - \varepsilon$ $C = 180° - \alpha$
40. δ, τ, σ	α	6	$A = \tau$ $B = \sigma$ $c = 90° - \delta$ $C = 180° - \alpha$
41. ε, η, δ	τ	1	$a = 90° - \eta$ $b = 90° - \varepsilon$ $c = 90° - \delta$ $x = \tau$
42. η, δ, α	τ	7	$a = 90° - \delta$ $b = 90° - \eta$ $A = 180° - \alpha$ $B = \tau$

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung.
43. ε, η, σ	τ	7	$a = 90° - \varepsilon$ $b = 90° - \eta$ $A = \sigma$ $B = \tau$
44. ε, η, α	τ	3	$x = 90° - \eta$ $a = 90° - \varepsilon$ $C = 180° - \alpha$ $X = \tau$
45. ε, δ, α	τ	8	$a = 90° - \delta$ $b = 90° - \varepsilon$ $A = 180° - \alpha$ $C = \tau$
46. η, δ, σ	τ	3	$x = 90° - \eta$ $a = 90° - \delta$ $C = \sigma$ $X = \tau$
47. ε, δ, σ	τ	8	$a = 90° - \varepsilon$ $b = 90° - \delta$ $A = \sigma$ $C = \tau$
48. η, α, σ	τ	6	$A = 180° - \alpha$ $B = \sigma$ $c = 90° - \eta$ $C = \tau$
49. ε, α, σ	τ	12	$A = \sigma$ $B = 180° - \alpha$ $a = 90° - \varepsilon$ $C = \tau$

Gegeben.	*Gesucht*	*Fall.*	*Auflösung.*
50. δ, α, σ	τ	12	$A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$ $a = 90^\circ - \delta$ $C = \tau$
51. $\varepsilon, \eta, \delta$	σ	1	$a = 90^\circ - \varepsilon$ $b = 90^\circ - \eta$ $c = 90^\circ - \delta$ $x = \sigma$
52. ε, η, τ	σ	7	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = \tau$ $B = \sigma$
53. $\varepsilon, \delta, \alpha$	σ	7	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \varepsilon$ $A = 180^\circ - \alpha$ $B = \sigma$
54. η, δ, τ	σ	8	$a = 90^\circ - \eta$ $b = 90^\circ - \delta$ $A = \tau$ $C = \sigma$
55. $\varepsilon, \delta, \tau$	σ	3	$x = 90^\circ - \varepsilon$ $a = 90^\circ - \delta$ $C = \tau$ $X = \sigma$
56. η, δ, α	σ	8	$a = 90^\circ - \delta$ $b = 90^\circ - \eta$ $A = 180^\circ - \alpha$ $C = \sigma$

Gegeben.	Gesucht	Fall.	Auflösung.
57. ε, η, α	σ	3	$x = 90° - \varepsilon$ $a = 90° - \eta$ $C = 180° - \alpha$ $X = \sigma$
58. η, α, τ	σ	12	$A = \tau$ $B = 180° - \alpha$ $a = 90° - \eta$ $C = \sigma$
59. ε, α, τ	σ	6	$A = 180° - \alpha$ $B = \tau$ $c = 90° - \varepsilon$ $C = \sigma$
60. δ, α, τ	σ	12	$A = 180° - \alpha$ $B = \tau$ $a = 90° - \delta$ $C = \sigma$

Gegeben.

ε Nördliche Polhöhe

δ Abweichung der ⊙ oder eines ✱ $\left\{\begin{array}{l}\text{Nördliche} +\\ \text{Südliche} -\end{array}\right.$

η Höhe der ⊙ oder eines ✱.

Erste Auflösung.

$$90^\circ - \eta = a;$$

$$90^\circ - \delta = b;$$

$$90^\circ - \varepsilon = c;$$

$$\frac{a+b+c}{2} = S;$$

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\tau = \sqrt{\left(\frac{r^2 .\ \mathrm{Sin}\,(S-b) .\ \mathrm{Sin}\,(S-c)}{\mathrm{Sin}\,b .\ \mathrm{Sin}\,c}\right)};$$

wo r der *Sinus totus* ist.

τ = in Gra

τ = in Zeit

Steht die ⊙ oder der ✱ auf der Ostseite, so wird die Zeit hirt; der Rest giebt z. Steht aber die ⊙ oder der ✱ die Zeit τ = z; hingegen bey dem ✱ wird die Zeit τ

Gesucht.

τ Stundenwinkel

z wahre Zeit der Beobachtung.

Zweyte Auflösung.

$90° - \eta = a;$
$90° - \delta = b;$
$90° - \varepsilon = c;$

man nenne *Seiten* = a, b;
so ist für den *Sinus totus* = r:

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Tang } \tfrac{1}{2}(a+b) . \text{ Tang } \tfrac{1}{2}(a \backsim b) . \text{ Cot } \tfrac{1}{2} c}{r^2}$$

Grosses Segment $= \tfrac{1}{2} c + u;$
Kleiner Segment $= \tfrac{1}{2} c - u;$

$$\text{Cosin } \tau = \frac{\text{Tang } \textit{des anliegenden Segments} . \text{ Cotang } b}{r}$$

In dieser letzten Gleichung nimmt man zu der grössten *Seite* das grosse Segment; das kleine zu der kleinsten *Seite*. Und wenn das kleine Segment negativ und < 90° sich findet, so setzt man die Tangente dieses Segments negativ.

---

den des Aequators
der ersten Bewegung.

τ von der Zeit der Culmination der ☉ oder des ✱ subtra-
auf der Westseite des Meridians, so ist bey der ☉ schon
zur Culminationszeit des ✱ addirt, und die Summe giebt z.

Gegeben.

ε Nördliche Polhöhe

δ Abweichung der ⊙ oder eines ✱ { Nördliche + / Südliche — }

η Höhe der ⊙ oder eines ✱.

Dritte Auflösung.

$$\frac{\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta}{2} = Q$$

$$\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \tau = \sqrt{\left(\frac{r^2 .\ \text{Cosin}\ Q .\ \text{Sin}\ (Q - \eta)}{\text{Cosin}\ \varepsilon .\ \text{Cosin}\ \delta}\right)}$$

wo r der *Sinus totus* ist.

τ = in Gr

τ = in Ze

Steht die ⊙ oder der ✱ auf der Ostseite, so wird die Ze hirt; der Rest giebt z. Steht aber die ⊙ oder der die Zeit $\tau = z$; hingegen bey dem ✱ wird die Zei

Gesucht.

τ Stundenwinkel

z wahre Zeit der Beobachtung.

Vierte Auflösung.

$$\frac{90^\circ - \delta - \varepsilon}{2} = u$$

$$\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\tau = r\left(\frac{r^2 .\ \text{Sin}\ (u - \frac{1}{2}\eta + \varepsilon) .\ \text{Sin}\ (u - \frac{1}{2}\eta + \delta)}{\text{Cosin}\ \varepsilon .\ \text{Cosin}\ \delta}\right)$$

Oder

$$\text{Cosin}\ \tfrac{1}{2}\tau = r\left(\frac{r^2 .\ \text{Cosin}\ (u - \frac{1}{2}\eta) .\ \text{Sin}\ (u + \frac{1}{2}\eta)}{\text{Cosin}\ \varepsilon .\ \text{Cosin}\ \delta}\right)$$

wo r der *Sinus totus* ist.

---

den des Aequators
der ersten Bewegung.

τ von der Zeit der Culmination der ☉ oder des ✻ subtra-
auf der Westseite des Meridians, so ist bey der ☉ schon
zur Culminationszeit des ✻ addirt, und die Summe giebt z.

Gegeben.

ε Nördliche Polhöhe

δ Abweichung eines Geſtirns $\left\{\begin{array}{l}\text{Nördliche} +\\ \text{Südliche} -\end{array}\right.$

τ Stundenwinkel.

Erſte Auflöſung.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cotang } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \tau}{r}$$

$$\text{Sin } \eta = \frac{\text{Sin } \varepsilon \,.\, \text{Sin } (u + \delta)}{\text{Cosin } u}$$

Für den *Sinus totus* = r.

Zweyte Auflöſung.

$$\text{Tang } u = r \left(\frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2}\tau \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2}\tau \,.\, \text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \delta}{\text{Sin } \tfrac{1}{2}(\varepsilon \backsim \delta) \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2}(\varepsilon \backsim \delta)} \right)$$

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2}(90^\circ - \eta) = \frac{r \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2}(\varepsilon \backsim \delta)}{\text{Cosin } u}$$

Für den *Sinus totus* = r.

Gesucht.

η Höhe des Gestirns.

Dritte Auflösung.

$$\text{Cosin } u = r\left(\frac{\text{Cosin } \frac{1}{2}\tau \,.\, \text{Cosin } \frac{1}{2}\tau \,.\, \text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \delta}{\text{Cosin } \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta) \,.\, \text{Cosin } \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)}\right)$$

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2}(90^\circ - \eta) = \frac{\text{Cosin } \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta) \,.\, \text{Sin } u}{r}$$

Für den *Sinus totus* = r.

Gegeben.

δ Abweichung $\begin{cases}\text{Nördliche } + \\ \text{Südliche } -\end{cases}$

η Höhe

τ Stundenwinkel eines Geſtirns.

Erſte Auflöſung.

$$\text{Sin } B = \frac{\text{Cosin } \delta \,.\, \text{Sin } \tau}{\text{Cosin } \eta}$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} (90^\circ - \varepsilon) = \frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} (\tau + B) \,.\, \text{Cotang } \tfrac{1}{2} (\eta + \delta)}{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} (\tau - B)}$$

Steht das Geſtirn zwiſchen dem erſten Scheitelkreiſe und demjenigen Quadranten des Meridians der durch den Scheitelpunkt und Südpunkt geht, ſo iſt B ſtumpf; ſteht ſolches aber zwiſchen dem erſten Vertikalkreiſe und demjenigen Quadranten des Meridians der durch den Scheitel - und Nordpunkt geht, ſo iſt B ſpitzig.

Gesucht.

ε Nördliche Polhöhe.

Zweyte Auflösung.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cosin } \tau \, . \, \text{Cotang } \delta}{r}$$

$$\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } u \, . \, \text{Sin } \eta}{\text{Sin } \delta}$$

$$u \pm z = 90^\circ - \varepsilon$$

Man nimmt die Summe u + z, wenn τ und B gleichartig ſind, im entgegengeſetzten Falle den Unterſchied u — z.

Steht das Geſtirn zwiſchen dem erſten Vertikalkreiſe und dem Quadranten des Meridians der durch den Scheitel und Südpunkt geht, ſo iſt B ſtumpf; ſteht es aber zwiſchen dem erſten Vertikalkreiſe und dem andern Theile des Meridians der durch den Scheitel und Nordpunkt geht, ſo iſt B ſpitzig.

Gegeben.

ε Nördliche Polhöhe

δ Abweichung der ⊙ oder eines ✱ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nördliche} + \\ \text{Südliche} - \end{array} \right.$

η Höhe der ⊙ oder eines ✱.

Gesucht.

α Azimuth der ⊙ oder eines ✱.

Auflösung.

$$\frac{\varepsilon + (90^0 - \eta) + \delta}{2} = u$$

$$\text{Cosin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{r^2 .\ \text{Cosin}\ u .\ \text{Sin}\ (u - \delta)}{\text{Cosin}\ \varepsilon .\ \text{Cosin}\ \eta}\right)}$$

wo r der *Sinus totus* ist.

α ist *östlich* oder *westlich*, je nachdem die ⊙ oder der ✱ *vor* oder *nach* dem Durchgange durch den Mittagskreis beobachtet wird.

Gegeben.

η Höhe eines Geſtirns

δ Abweichung $\left\{\begin{array}{l}\text{Nördliche } +\\ \text{Südliche } -\end{array}\right.$

α Azimuth $\left\{\begin{array}{l}\text{Oeſtlich}\\ \text{Weſtlich}\end{array}\right.$

Geſucht.

τ Stundenwinkel

z Zeit der Beobachtung.

Auflöſung.

$$\text{Sin } \tau = \frac{\text{Cosin } \eta \,.\, \text{Sin } \alpha}{\text{Cosin } \delta}$$

τ in Graden des Aequators giebt in Zeit der erſten Bewegung verwandelt die wahre Zeit z durch $\left\{\begin{array}{l}\text{Subtraktion von}\\ \text{Addition zu}\end{array}\right\}$ der Culminationszeit des Geſtirns je nachdem α $\left\{\begin{array}{l}\text{öſtlich}\\ \text{weſtlich}\end{array}\right\}$ iſt.

Gegeben.

η Höhe eines Geſtirns

δ Abweichung $\begin{cases} \text{Nördliche} + \\ \text{Südliche} - \end{cases}$

α Azimuth. Oeſtlich oder Weſtlich.

Geſucht.

ε Nördliche Polhöhe.

Erſte Auflöſung.

$$\text{Sin}\,\tau = \frac{\text{Cosin}\,\eta\,.\ \text{Sin}\,\alpha}{\text{Cosin}\,\delta}$$

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,(90^\circ - \varepsilon) = \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(\alpha - \tau)\,.\ \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\,(\eta + \delta)}{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(\alpha + \tau)}$$

Zweyte Auflöſung.

$$\text{Tang}\,u = -\frac{\text{Cosin}\,\alpha\,.\ \text{Cotang}\,\eta}{r}$$

$$\text{Cosin}\,z = \frac{\text{Cosin}\,u\,.\ \text{Sin}\,\delta}{\text{Sin}\,\eta}$$

$$u \pm z = 90^\circ - \varepsilon$$

Für den *Sinus totus* = r.

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn der Nebenwinkel des Azimuths $180^\circ - \alpha$ und der Stundenwinkel τ gleichartig ſind; gegentheils den Unterſchied $u - z$.

Einige

Erläuterungen und Beyspiele zu den 60 Fällen im schiefwinklichten Kugeldreieck in dessen Winkeln Nordpol P, Scheitelpunkt Z und Stern S sind.

Erste Aufgabe.

Aus der Nördlichen Polhöhe $= \varepsilon$, *der Abweichung* $= \delta \begin{Bmatrix} \text{Nördl.} + \\ \text{Südl.} - \end{Bmatrix}$, *und der Höhe eines Gestirns* $= \eta$; *die Zeit* $= z$ *zu finden.*

Erste Auflösungsart.

Wenn in Taf. II. Fig. XVII. Z das Zenith, P den Nordpol, und S das Gestirn bezeichnet; so ist ZP das Complement der Polhöhe; SP das Complement der Abweichung des Gestirns; SZ das Complement der Höhe desselben; oder

$$ZP = 90^\circ - \varepsilon = c \qquad \frac{a + b + c}{2} = S$$
$$SP = 90^\circ - \delta = b$$
$$SZ = 90^\circ - \eta = a$$

Sind diese drey Stücke gegeben, so findet sich der Stundenwinkel ZPS = τ = x vermittelst des ersten Falles schiefwinklichter Kugeldreiecke, nemlich durch die Gleichung

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,x = \sqrt{\left(\frac{r^2.\ \text{Sin}\,(S-b).\ \text{Sin}\,(S-c)}{\text{Sin}\,b.\ \text{Sin}\,c}\right)}$$

diesen Stundenwinkel verwandelt man dann in Zeit, 15° auf 1 St. gerechnet (Berl. Samml. astron. Tafeln, Band 1. Tafel XXXI. Seite 293) und wenn man nun noch die Zeit des Durchgangs des Gestirns durch den Mittagskreis weis, so wird auch die Zeit der Beobachtung gegeben seyn.

Beyspiel 1. Für die Sonne.

$\varepsilon = 51°\ 32'\ 0''$
$\delta = +19.\ 39.\ 10.$ oder Nördlich
$\eta = 38.\ 18.\ 46.$

Rechnung.

$90° = 90°\ 0'\ 0''$	$90° = 89°\ 59'\ 60''$	$90° = 89°\ 59'\ 60''$
$\varepsilon = 51.32.0.$	$\delta = +19.39.10.$	$\eta = 38.18.46.$
$90° - \varepsilon = 38.28.0. = c$	$90° - \delta = 70.20.50. = b$	$90° - \eta = 51.41.14. = a$

$a = 51°\ 41'\ 14''$	$S = 80°\ 15'\ 2''$	$S = 80°\ 15'\ 2''$
$b = 70.20.50.$	$b = 70.20.50.$	$c = 38.28.0.$
$c = 38.28.\ 0.$	$S - b = 9.54.12.$	$S - c = 41.47.2.$
$a+b+c = 160.30.\ 4.$		
$\frac{a+b+c}{2} = 80.15.\ 2. = S$		

$20 + \log \text{Sin}(S - b)$	=	29,2354941
$+ \log \text{Sin}(S - c)$	=	9,8236847
Summe	=	39,0591788
$- \log \text{Sin}\, b$	=	9,9739347
Reſt	=	29,0852441
$- \log \text{Sin}\, c$	=	9,7938317
Reſt	=	19,2914124
Hälfte	=	9,6457062
	=	$\log \text{Sin} \frac{1}{2} x$
$\frac{1}{2} x$	=	26° 15′ 0″
x	=	52. 30. 0. = τ
52°	=	3 St. 28. 0.
30′	=	0 2. 0.
52° 30′ 0″ in Zeit verw.	=	3. 30. 0.
die Sonne culminirt um		12. 0. 0.
Folglich z	=	8 Uhr 30. 0. Vormittage.
oder	=	3. 30. 0. Nachmittage,

je nachdem die Sonne auf der Oſt- oder Weſtſeite des Meridians, zur Zeit der Beobachtung ſtand.

Beyſpiel 2, ebenfalls für die Sonne.

ε = 43° 18′ 0″
δ = −19. 39. 10. d. i. Südlich
η = 20. 10. 0.

Rechnung.

90° = 90° 0′ 0″	90° = 90° 0′ 0″	90° = 89° 60′ 0″
ε = 43. 18. 0.	δ = −19. 39. 10.	η = 20. 10. 0.
90° − ε = 46. 42. 0. = c	90° − δ = 109. 39. 10. = b	90° − η = 69. 50. 0. = a
a = 69° 50′ 0″	S = 113° 5′ 35″	S = 113° 5′ 35″
b = 109. 39. 10.	b = 109. 39. 10.	c = 46. 42. 0.
c = 46. 42. 0.	S − b = 3. 26. 25.	S − c = 66. 23. 35.
a + b + c = 226. 11. 10.		
$\frac{a+b+c}{2}$ = 113. 5. 35. = S		

$$20 + \log \text{Sin } (S - b) = 28{,}7782098$$
$$+ \log \text{Sin } (S - c) = 9{,}9620444$$

$$\text{Summe} = 38{,}7402542$$
$$- \log \text{Sin } b = 9{,}9739347$$

$$\text{Reſt} = 28{,}7663195$$
$$- \log \text{Sin } c = 9{,}8619958$$

$$2.\ \log \text{Sin } \tfrac{1}{2} x = 18{,}9043237$$
$$\log \text{Sin } \tfrac{1}{2} x = 9{,}4521618$$
$$\tfrac{1}{2} x = 16^\circ\ 27'\ 14''$$
$$x = 32.\ 54.\ 28. = \tau$$
$$32^\circ = 2\ \text{St.}\ 8.\ 0.$$
$$54' = 0.\ 3.\ 36.$$
$$28'' = 0.\ 0.\ 1{,}9.$$

$$32^\circ\ 54'\ 28'' = 2.\ 11.\ 37{,}9.$$ *vor* oder *nach* 12 Uhr Mittags. Alſo die Zeit z entweder

= 9 Uhr 48′ 22,1″ Vormitt.

oder = 2. 11. 37,9. Nachm.

Anmerkung.

Wollte man die Formel des Sin $\frac{1}{2}$ x für einen Ort brauchen, wo der Südpol erhoben wäre, und deutete durch den bejahten Werth von ε, *Südliche* Polhöhe an, ſo würde der bejahte Werth von δ, Südlicher Abweichung, der verneinte Werth von δ aber, Nördlicher Abweichung zugehören.

Zweyte Auflösungsart.

Hier bleiben alle Vorbereitungen wie bey der ersten Auflösungsart, nur wird ſtatt der vorhergehenden Formel, Fall 1 der Auflöſung ſchiefwinklichter Kugeldreiecke num. 1. die num. 4. daſelbſt Seite 75 vorkommende gewählt. Die Rechnung wird jetzt ſo geführt:

Beyſpiel 1. Für den Aldebaran.

$\varepsilon = 51^\circ\ 15'\ 0''$ Nördlich.
$\delta = +16.\ 1.\ 6.$ od. Nö. d. 13 Nov. 1764.
$\eta = 38.\ 58.\ 0.$ öſtlich oder vor der Culmination.
Culminat. des ✱ = 13U. 3. 53,7.

Man verlangt die wahre Zeit der Beobachtung zu wiſſen.

Rechnung.

$90^\circ = 89^\circ\ 60'\ 0''$	$90^\circ = 89^\circ\ 59'\ 60''$	$90^\circ = 89^\circ\ 60'\ 0''$
$\varepsilon = 51.\ 15.\ 0.$	$\delta = +16.\ 1.\ 6.$	$\eta = 38.\ 58.\ 0.$
$90^\circ - \varepsilon = 38.\ 45.\ 0. = c$	$90^\circ - \delta = 73.\ 58.\ 54. = b > a$	$90^\circ - \eta = 51.\ 2.\ 0. = a$

$a = 51^\circ\ 2'\ 0''$	$\log \text{Tang}\ \frac{1}{2}(a+b) = 10{,}2836622$
$b = 73.\ 58.\ 54.$	$+ \log \text{Tang}\ \frac{1}{2}(b-a) = 9{,}3074592$
$a+b = 125.\ 0.\ 54.$	$+ \log \text{Cotang}\ \frac{1}{2}c = 10{,}4538706$
$\frac{a+b}{2} = 62.\ 30.\ 27.$	$\log \text{Tang}\ u = 10{,}0449920$
	$u = 47^\circ\ 57'\ 45''$
$b-a = 22.\ 56.\ 54.$	$\frac{1}{2}c = 19.\ 22.\ 30.$
$\frac{b-a}{2} = 11.\ 28.\ 27.$	$\frac{1}{2}c + u = 67.\ 20.\ 15$ *wird hier genommen, weil* $b > a$. *Folglich hat man*
$c = 38.\ 45.\ 0.$	
$\frac{1}{2}c = 19.\ 22.\ 30.$	$\text{Cosin}\ \tau = \text{Tang}\ (\frac{1}{2}c+u) \cdot \text{Cotang}\ b.$

$$\log \mathrm{Tang}\,(\tfrac{1}{2}c+u) = 10,3793016$$
$$+\log \mathrm{Cotang}\; b = 9,4580206$$

$$\log \mathrm{Cosin}\;\tau = 9,8373222$$
$$\tau = 46^\circ\; 33'\; 41''$$
$= 3$ St. 6. 14,7. *Subtrahirt von der*
Culmination des ✱ $= 13.\; 3.\; 53,7.$

$z = 9.\; 57.\; 39,0.$ *die gesuchte wahre Zeit der Beobachtung.*

Beyspiel 2. Für die Sonne.

$\varphi = 43^\circ\, 18'\; 0''$ Nö.	$c = 46^\circ\, 42'\; 0''$	$\tfrac{1}{2}c = 23^\circ\; 21'\; 0''$
$\delta = -19.39.10.$ d. i. Sü.	$b = 109.\,39.\,10.$	$\dfrac{a+b}{2} = 89.\,44.\,35.$
$\eta = 20.\,10.\;0.$	$a = 69.\,50.\;0.$	$\dfrac{b-a}{2} = 19.\,54.\,35.$

$$\log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = 12,3482805$$
$$\log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}(b-a) = 9,5589327$$
$$\log \mathrm{Cotang}\,\tfrac{1}{2}c = 10,3648150$$

$$\log \mathrm{Tang}\; u = 12,2720282$$
$$u = 89^\circ\; 41'\; 37''$$
$$\tfrac{1}{2}c = 23.\; 21.\; 0.$$

$$\tfrac{1}{2}c+u = 113.\; 2.\; 37.$$

weil b die gröſste *Seite* iſt.

$$\mathrm{Cosin}\,\tau = \mathrm{Tang}\,(\tfrac{1}{2}c+u).\; \mathrm{Cotang}\; b$$
$$= \mathrm{Tang}\; 113^\circ\; 2'\; 37''.\; \mathrm{Cotang}\; 109^\circ\; 39'\; 10''$$
$$= \mathrm{Tang}\; 66^\circ\; 57'\; 23''.\; \mathrm{Cotang}\; 70^\circ\; 20'\; 50''$$
$$\log \mathrm{Tang}\; 66^\circ\; 57'\; 23'' = 10,3712297$$
$$\log \mathrm{Cotang}\; 70.\; 20.\; 50. = 9,5528169$$

$$\log \mathrm{Cosin}\,\tau = 9,9240466$$
$$\tau = 32^\circ\; 54'\; 26,5''$$
$= 2$St. 11. 37,8. *der geſuchte Stundenwinkel*, wie vorher Beyſpiel 2 der erſten Auflöſungsart, Seite 146.

Anmerkung.

Wenn man, wie Seite 128. num. 41. angegeben ist, $b = 90° - \varepsilon$ und $c = 90° - \delta$ setzt, so wird im vorhergehenden Beyspiele 2, $b = 46° 42' 0''$ und $c = 109° 39' 10''$ also $b < a$ oder b zur kleinsten *Seite*. Für diesen Fall steht nun die Rechnung also:

$\delta = -19° 39' 10''$	$c = 109° 39' 10''$	$\frac{1}{2} c = 54° 49' 35''$
$\varepsilon = 43. 18. 0.$	$b = 46. 42. 0.$	$\frac{a+b}{2} = 58. 16. 0.$
$\eta = 20. 10. 0.$	$a = 69. 50. 0.$	$\frac{a-b}{2} = 11. 34. 0.$

$$\begin{aligned}
\log \text{Tang } \tfrac{1}{2}(a+b) &= 10{,}2087189 \\
\log \text{Tang } \tfrac{1}{2}(a-b) &= 9{,}3110421 \\
\log \text{Cotang } \tfrac{1}{2} c &= 9{,}8480245 \\
\hline
\log \text{Tang } u &= 9{,}3677855 \\
u &= 13° \; 7' \; 42'' \\
\tfrac{1}{2} c &= 54. \; 49. \; 35. \\
\hline
\tfrac{1}{2} c - u &= 41. \; 41. \; 53.
\end{aligned}$$

weil b die kleinste *Seite* ist.

$$\text{Cosin } \tau = \text{Tang } (\tfrac{1}{2} c - u) \, . \, \text{Cotang } b$$

$$\begin{aligned}
\log \text{Tang } (\tfrac{1}{2} c - u) &= 9{,}9498322 \\
\log \text{Cotang } b &= 9{,}9742133 \\
\hline
\log \text{Cosin } \tau &= 9{,}9240455 \\
\tau &= 32° \; 54' \; 27'' \\
&= 2 \text{ St. } 11. \; 37{,}8.
\end{aligned}$$

wie auf der vorhergehenden Seite.

Dritte Auflösungsart.

In der Formel für Sin $\frac{1}{2}\tau$ der ersten Auflösungsart setze man statt S, b und c die Werthe derselben, nemlich

$$S = \frac{(90^\circ - \eta) + (90 - \delta) + (90^\circ - \varepsilon)}{2}$$

$$b = 90^\circ - \delta$$

$$c = 90^\circ - \varepsilon$$

Nun ist aber S — b d. i.

$$\frac{(90^\circ - \eta) + (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \varepsilon)}{2} - (90^\circ - \delta) = \frac{90^\circ - \varepsilon + \delta - \eta}{2}$$

und S — c d. i.

$$\frac{(90^\circ - \eta) + (90^\circ - \delta) + (90^\circ - \varepsilon)}{2} - (90^\circ - \varepsilon) = \frac{\varepsilon + (90 - \delta) + \eta}{2} - \eta$$

Dahero

$$\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\tau = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon + \delta - \eta) . \operatorname{Sin} (\frac{1}{2}(\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta) - \eta)}{\operatorname{Cosin} \delta . \operatorname{Cosin} \varepsilon}$$

$$= \frac{\operatorname{Cosin} \frac{1}{2}(\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta) . \operatorname{Sin} (\frac{1}{2}(\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta) - \eta)}{\operatorname{Cosin} \delta . \operatorname{Cosin} \varepsilon}$$

und

$$\frac{\varepsilon + (90^\circ - \delta) + \eta}{2} = Q \textit{ gesetzt:}$$

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\tau = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Cosin} Q . \operatorname{Sin} (Q - \eta)}{\operatorname{Cosin} \varepsilon . \operatorname{Cosin} \delta}\right)}$$

Beyspiel 1.

$\varepsilon = 52^\circ\ 0'\ 0''$ Nördlich.
$\delta = 22.\ 5.\ 0.$ Nördlich.
$\eta = 33.\ 0.\ 0.$

Rechnung.

$90^\circ = 90^\circ\ 0'\ 0''$	$20 + \log \text{Cosin } Q = 29,3694987$
$\delta = +22.\ 5.\ 0.$	$+ \log \text{Sin}(Q - \eta) = 9,8608617$
$90^\circ - \delta = 67.\ 55.\ 0.$	$\text{Summe} = 39,2303604$
$\varepsilon = 52.\ 0.\ 0.$	$- \log \text{Cosin } \varepsilon = 9,7893420$
$\eta = 33.\ 0.\ 0.$	$\text{Rest} = 29,4410184$
$\text{Summe} = 152.\ 55.\ 0.$	$- \log \text{Cosin } \delta = 9,9669101$
$Q = 76.\ 27.\ 30.$	$2. \log \text{Sin } \frac{1}{2} \tau = 19,4741083$
$\eta = 33.\ 0.\ 0.$	$\log \text{Sin } \frac{1}{2} \tau = 9,7370541$
$Q - \eta = 43.\ 27.\ 30.$	$\frac{1}{2} \tau = 33^\circ\ 4'\ 52''$
	$\tau = 66.\ 9.\ 44.$
	$66^\circ = 4\text{St}.24.\ 0.$
	$9' = 0.\ 0.\ 36.$
	$44'' = 0.\ 0.\ 2,9.$
	τ in Zeit $= 4.\ 24.\ 38,9.$

Beyspiel 2.

$\varepsilon = 43^\circ\ 18'\ 0''$ Nördlich.
$\delta = 19.\ 39.\ 10.$ Südlich.
$\eta = 20.\ 10.\ 0.$

Rechnung.

$90^\circ = 90^\circ\ 0'\ 0''$	$20 + \log \text{Cosin}\, Q = 28,7782098$
$\delta = -19.\ 39.\ 10.$	$+ \log \text{Sin}\, (Q - \eta) = 9,9620444$
$90^\circ - \delta = 109.\ 39.\ 10.$	$\text{Summe} = 38,7402542$
$\varepsilon = 43.\ 18.\ 0.$	$- \log \text{Cosin}\, \varepsilon = 9.8619958$
$\eta = 20.\ 10.\ 0.$	$\text{Rest} = 28,8782584$
$\text{Summe} = 173.\ 7.\ 10.$	$- \log \text{Cosin}\, \delta = 9,9739347$
$Q = 86.\ 33.\ 35.$	$2.\ \log \text{Sin}\, \frac{1}{2}\tau = 18,9043237$
$\eta = 20.\ 10.\ 0.$	$\log \text{Sin}\, \frac{1}{2}\tau = 9,4521618$
$Q - \eta = 66.\ 23.\ 35.$	$\frac{1}{2}\tau = 16^\circ\ 27'\ 14''$
	$\tau = 32.\ 54.\ 28.$
	= 2St. 11. 37,9.
	wie Seite 146.

Vierte Auflöſungsart.

Dieſe iſt ſchon Seite 106 vorgekommen; es iſt alſo nur noch übrig zu zeigen, wie die Rechnung nach ihr vorgenommen wird.

Beyſpiel.

$\varepsilon = 50^\circ\ 8'\ 0''$ Nö.
$\delta = 10.\ 18.\ 0.$ Nö.
$\eta = 3.\ 18.\ 34.$ Vormittage, an der Sonne.

$90^\circ\ 0'\ 0''$	$20 + \log \text{Sin}(u - \frac{1}{2}\eta + \varepsilon) = 29{,}9508868$
$\delta = +\ 10.\ 18.\ 0.$	$+ \log \text{Sin}(u - \frac{1}{2}\eta + \delta) = 9{,}5994531$
$90^\circ - \delta = 79.\ 42.\ 0.$	Summe $= 39{,}5503399$
$\varepsilon = 50.\ 8.\ 0.$	$- \log \text{Cosin}\ \varepsilon = 9{,}8068602$
$90^\circ - \delta - \varepsilon = 29.\ 34.\ 0.$	Reſt $= 29{,}7434797$
$u = 14.\ 47.\ 0.$	$- \log \text{Cosin}\ \delta = 9{,}9929444$
$\frac{1}{2}\eta = 1.\ 39.\ 17.$	$2.\ \log \text{Sin}\ \frac{1}{2}\tau = 19{,}7505353$
$u - \frac{1}{2}\eta = 13.\ 7.\ 43.$	$\log \text{Sin}\ \frac{1}{2}\tau = 9{,}8752676$
$u - \frac{1}{2}\eta + \varepsilon = 63.\ 15.\ 43.$	$\frac{1}{2}\tau = 48^\circ\ 37'\ 16{,}5''$
$u - \frac{1}{2}\eta + \delta = 23.\ 25.\ 43.$	$\tau = 97.\ 14.\ 33.$
Oder	$97^\circ = 6$St. $28.\ 0.$
$u + \frac{1}{2}\eta = 16.\ 26.\ 17.$	$14' = 0.\ 0.\ 56.$
	$33'' = 0.\ 0.\ 2{,}2.$
	τ in Zeit $= 6.\ 28.\ 58{,}2.$
	ſubtr. von 12 St. $= 11.\ 59.\ 60{,}0.$
	$z = 5$U. $31.\ 1{,}8.$ Früh *die verlangte wahre Zeit.*

Oder

$20 + \log \text{Cosin}\ (u - \frac{1}{2}\eta) = 29{,}9884977$
$+ \log \text{Sin}\ (u + \frac{1}{2}\eta) = 9{,}4517535$
Summe $= 39{,}4402512$
$- \log \text{Cosin}\ \varepsilon = 9{,}8068502$
Reſt $= 29{,}6333910$
$- \log \text{Cosin}\ \delta = 9{,}9929444$
$2.\ \log \text{Cosin}\ \frac{1}{2}\tau = 19{,}6404466$
$\log \text{Cosin}\ \frac{1}{2}\tau = 9{,}8202233$
$\frac{1}{2}\tau = 48^\circ\ 37'\ 16{,}6''$
$\tau = 97.\ 14.\ 33{,}2.$
$= 6$St. $28.\ 58{,}2.$ wie vorhin.

Zweyte Aufgabe.

Aus der Nördlichen Polhöhe $= \varepsilon$, der Abweichung $= \delta \left\{ \begin{array}{l} \text{Nördl.} + \\ \text{Südl.} - \end{array} \right\}$ und dem Stundenwinkel $= \tau$; die Höhe des Gestirns $= \eta$ zu finden.

Erste Auflösung.

Es ist hier im Kugeldreieck, welches mit dem zur vorigen Aufgabe einerley ist, gegeben:

$$\begin{array}{l} ZP = 90^\circ - \varepsilon = a \\ SP = 90^\circ - \delta = c \\ ZPS = \tau \qquad = B \end{array}$$

Man sehe Tafel II. — Fig. XVIII.

und wird gesucht:

$$ZS = 90^\circ - \eta = b$$

Man hat also ein sphärisches Dreieck aufzulösen, in welchem zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind, und die dritte Seite gesucht wird. Dies ist der vierte Fall bey der Auflösung schiefwinklichter Kugeldreiecke, und so wird seyn, für den Halbmesser $= 1$:

$$\text{Tang } u = \text{Tang } a \,.\, \text{Cosin } B$$

$$= \text{Cotang } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \tau$$

$$\text{Cosin } b = \frac{\text{Cosin } a \,.\, \text{Cosin } (c - u)}{\text{Cosin } u}$$

d. i.

$$\text{Sin } \eta = \frac{\text{Sin } \varepsilon \,.\, \text{Sin } (\delta + u)}{\text{Cosin } u}$$

Zweyte Auflösung.

$$\text{Tang } u = \sqrt{\left(\frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} B \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} B \,.\, \text{Sin } a \,.\, \text{Sin } c}{\text{Sin } \tfrac{1}{2} (a \backsim c) \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} (a \backsim c)}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \delta}{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} [(90^\circ - \varepsilon) \backsim (90^\circ - \delta)]}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \delta}{\text{Sin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon \backsim \delta) \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon \backsim \delta)}\right)};$$

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} b \text{ oder Sin } \tfrac{1}{2} (90^\circ - \eta) = \frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon \backsim \delta)}{\text{Cosin } u}.$$

Wenn man aber erwägt, daſs *für die Sonne* in unſern nördlichen Gegenden, allezeit $\varepsilon > \delta$ iſt, ſo wird für ſelbige, ſo wie auch für alle Sterne wo $\varepsilon > \delta$:

$$\text{Tang } u = \sqrt{\left(\frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \delta}{\text{Sin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta) \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta)}\right)}$$

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} (90^\circ - \eta) = \frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta)}{\text{Cosin } u}$$

Dritte Auflösung.

$$\text{Cosin } u = \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} B \,.\, \text{Cosin } \tfrac{1}{2} B \,.\, \text{Sin } a \,.\, \text{Sin } c}{\text{Sin } \tfrac{1}{2} (a + c) \,.\, \text{Sin } \tfrac{1}{2} (a + c)}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Cosin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \delta}{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} (180^\circ - (\varepsilon + \delta))}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Cosin } \tfrac{1}{2} \tau \,.\, \text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \delta}{\text{Cosin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \delta) \,.\, \text{Cosin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \delta)}\right)}$$

Endlich

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} b = \text{Sin } \tfrac{1}{2} (a + c) \,.\, \text{Sin } u$$

giebt

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} (90^\circ - \eta) = \text{Cosin } \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \delta) \,.\, \text{Sin } u$$

Beyspiel.

$\varepsilon = 52^\circ\ 31'\ 30''$ Nö.
$\delta = +22.\ 12.\ 15.$ d. i. No.
$\tau =$ 3St. 50. als Zeit der ersten Bewegung und in Graden des Aequators
$= 57^\circ\ 30.\ 0.$

Man verlangt hieraus die Höhe der Sonne $= \eta$.

Rechnung nach der 1sten Auflösung.

log Cotang ε	=	9,8845881
log Cosin τ	=	9,7302165
log Tang u	=	9,6148046
u	=	22° 23′ 14″
$+\delta$	=	+22. 12. 15.
u+δ	=	44. 35. 29.
log Sin ε	=	9,8996120
log Sin (u+δ)	=	9,8463656
Summe	=	19,7459776
— log Cos u	=	9,9659684
log Sin η	=	9,7800092
η	=	37° 3′ 16″ *die gesuchte wahre Höhe der Sonne.*

Rechnung nach der 2ten Auflösung.

$\tau =$	$57^\circ\ 30'\ 0''$
$\frac{1}{2}\tau =$	$28.\ 45.\ 0.$
$\varepsilon =$	$52.\ 31.\ 30.$
$\delta =$	$+\ 22.\ 12.\ 15.$
$\varepsilon - \delta =$	$30.\ 19.\ 15.$
$\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) =$	$15.\ 9.\ 37{,}5.$
$\log \text{Sin} \frac{1}{2}\tau =$	$9{,}6821349$
$\log \text{Sin} \frac{1}{2}\tau =$	$9{,}6821349$
$\log \text{Cosin}\, \varepsilon =$	$9{,}7842001$
$\log \text{Cosin}\, \delta =$	$9{,}9665374$
Summe $=$	$39{,}1150073$
$-\log \text{Sin} \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) =$	$9{,}4175089$
Reſt $=$	$29{,}6974984$
$-\log \text{Sin} \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) =$	$9{,}4175089$
$2.\log \text{Tang}\, u =$	$20{,}2799895$
$\log \text{Tang}\, u =$	$10{,}1399947$
$u =$	$54^\circ\ 4'\ 43''$
$10 + \log \text{Sin} \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) =$	$19{,}4175089$
$-\log \text{Cosin}\, u =$	$9{,}7683974$
$\log \text{Sin} \frac{1}{2}(90^\circ - \eta) =$	$9{,}6491115$
$\frac{1}{2}(90^\circ - \eta) =$	$26^\circ\ 28'\ 22''$
$90^\circ - \eta =$	$52.\ 56.\ 44.$
$\eta =$	$37.\ 3.\ 16.$

wahre ☉höhe.

Rechnung nach der 3ten Auflösung.

$\tau =$	$57^\circ\ 30'\ 0''$
$\frac{1}{2}\tau =$	28. 45. 0.
$\varepsilon =$	52. 31. 30.
$\delta =$	+ 22. 12. 15.
$\varepsilon + \delta =$	74. 43. 45.
$\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) =$	37. 21. 52,5.
log Cosin $\frac{1}{2}\tau =$	9,9428643
log Cosin $\frac{1}{2}\tau =$	9,9428643
log Cosin $\varepsilon =$	9,7842001
log Cosin $\delta =$	9,9665374
Summe $=$	39,6364661
— log Cosin $\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) =$	9,9002523
Rest $=$	29,7362138
— log Cosin $\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) =$	9,9002523
2. log Cosin u $=$	19,8359615
log Cosin u $=$	9,9179807
u $=$	$34^\circ\ 6'\ 57''$
log Sin u $=$	9,7488605
log Cosin $\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) =$	9,9002523
log Sin $\frac{1}{2}(90^\circ - \eta) =$	9,6491128
$\frac{1}{2}(90^\circ - \eta) =$	$26^\circ\ 28'\ 22''$
$90^\circ - \eta =$	52. 56. 44.
$\eta =$	37. 3. 16.
	wahre ⊙höhe.

Anmerkung.

Nach der ersten Auflösungsart kann eine Hülfstafel für eine constante Polhöhe ε und variable Zeit τ berechnet werden. Dieser Tafel Eingang oder Argument wird τ in Zeit, und sie muss den Winkel u und

daneben den dazu gehörigen $\log \frac{\text{Sin } \varepsilon}{\text{Cosin u}}$ enthalten. Mit der gegebenen Zeit τ excerpirt man aus ihr u und $\log \frac{\text{Sin } \varepsilon}{\text{Cosin u}}$ die beyde nebeneinander ſtehen. Da man nun u nebſt δ hat, ſo addirt man zu $\log \frac{\text{Sin } \varepsilon}{\text{Cosin u}}$ den $\log \text{Sin } (u + \delta)$. Die Summe giebt den verlangten $\log \text{Sin } \eta$. Eine dergleichen Tafel für die Berliner Polhöhe befindet ſich im erſten Supplementbande zu Bodens aſtronomiſchen Jahrbüchern, Seite 78 — 86; nach derſelben wird das vorhergehende Beyſpiel ſo berechnet:

$\tau = 3$ St. $50'$ giebt für Berlin:

$$u = 22^\circ\ 23'\ 14'' \qquad \log \frac{\text{Sin } \varepsilon}{\text{Cosin u}} = 9{,}9336436$$
$$\delta = +22.\ 12.\ 15.$$

$$u + \delta = 44.\ 35.\ 29. \qquad \log \text{Sin} (u+\delta) = 9{,}8463656$$

$$\log \text{Sin } \eta = 9{,}7800092$$
$$\eta = 37^\circ\ 3'\ 16''$$ genau ſo wie vorher.

Dritte Aufgabe.

Aus der Abweichung $= \delta \left\{ \begin{matrix} \text{Nördl.} + \\ \text{Südl.} - \end{matrix} \right\}$, *der Höhe* $= \eta$, *und dem Stundenwinkel eines Geſtirns* $= \tau$; *die Nördliche Polhöhe* $= \varepsilon$ *zu berechnen.*

Auflöſung.

Dies iſt *Fall 9* ſchiefwinklichter Kugeldreiecke: und es iſt hier

$$\text{gegeben} \left\{ \begin{array}{r} 90^\circ - \eta = ZS = a \\ 90^\circ - \delta = PS = b \\ \tau = ZPS = A \end{array} \right.$$

Man ſehe Tafel II. Fig. XIX.

$$\text{man ſucht } 90^\circ - \varepsilon = ZP = c$$

Es wird alſo ſeyn:

Die erſte Auflöſungsart.

$$\text{Sin B} = \frac{\text{Sin b . Sin A}}{\text{Sin a}} = \frac{\text{Cosin } \delta \text{ . Sin } \tau}{\text{Cosin } \eta};$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} \text{ c oder Tang } \tfrac{1}{2} (90^\circ - \varepsilon) = \frac{\text{Cosin } \frac{1}{2}(A+B) \text{ . Tang } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{Cosin } \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= \frac{\text{Cosin } \frac{1}{2}(\tau+B) \text{ . Cot } \frac{1}{2}(\eta+\delta)}{\text{Cosin } \frac{1}{2}(\tau-B)}$$

Da bey den Sonnenhöhen, B gewöhnlich ſtumpf iſt, ſo waltet bey dieſen keine Zweydeutigkeit ob. Ueberhaupt kann man ſich merken, wenn der Stern zwiſchen dem ſogenannten *erſten* Vertikalkreiſe (der durch den Oſt- und Weſtpunkt geht) und dem Südpunkte ſteht, ſo iſt B ſtumpf; ſteht er aber zwiſchen dem erſten Vertikalkreiſe und dem Nordpunkt, ſo iſt B ſpitzig. Dies gilt auch bey der folgenden zweyten Auflöſungsart.

Die zweyte Auflösungsart.

$$\text{Tang } u = \text{Cosin } A \,.\; \text{Tang } b = \text{Cosin } \tau \,.\; \text{Cotang } \delta;$$

$$\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } u \quad \text{Cosin } a}{\text{Cosin } b} = \frac{\text{Cosin } u \,.\, \text{Sin } \eta}{\text{Sin } \delta};$$

$$u \pm z = c = 90^\circ - \varepsilon.$$

Man nimmt die Summe $u + z$, wenn τ und B gleichartig ſind, hingegen den Unterſchied $u - z$, wenn τ und B ungleichartig ſind. Da aber bey den Sonnenhöhenmeſſungen die Winkel τ und B gewöhnlich ungleichartig ſind, oder τ ſpitzig und B ſtumpf iſt; ſo hat man bey der Sonne

$$u - z = c = 90^\circ - \varepsilon$$

und die Zweydeutigkeit fällt ebenfalls weg.

Beyſpiel 1.

δ	=	12°	8′	8″	Nördlich.
η	=	41.	8.	6.	
τ	=	36.	3.	15.	

Berechnung nach der erſten Auflöſungsart.

log Cosin δ	=	9,9901847
log Sin τ	=	9,7697833
Summe	=	19,7599680
log Cosin η	=	9,8768883
log Sin B	=	9,8830797
gehört zu		49° 48′ 58″
ſubtr. von		179. 59. 60.
bleibt B	=	130. 11. 2. *ſtumpf.*

τ	=	36° 3′ 15″
B	=	130. 11. 2.
$\tau + B$	=	166. 14. 17.
$\frac{1}{2}(\tau + B)$	=	83. 7. 8,5.
$B - \tau$	=	94. 7. 47.
$\frac{1}{2}(B - \tau)$	=	47. 3. 53,5.
η	=	41. 8. 6.
δ	=	+ 12. 8. 8.
$\eta + \delta$	=	53. 16. 14.
$\frac{1}{2}(\eta + \delta)$	=	26. 38. 7.
log Cosin $\frac{1}{2}(\tau + B)$	=	9,0784827
log Cotang $\frac{1}{2}(\eta + \delta)$	=	10,2997005
Summe	=	19,3781832
log Cosin $\frac{1}{2}(\tau - B)$	=	9,8332555
log Tang $\frac{1}{2}(90° - \varepsilon)$	=	9,5449277
$\frac{1}{2}(90° - \varepsilon)$	=	19° 19′ 31,5″
$90° - \varepsilon$	=	38. 39. 3.
ε	=	51. 20. 57. *die verlangte Polhöhe.*

Berechnung nach der zweyten Auflösungsart.

log Cosin τ	=	9,9076590
log Cotang δ	=	10,6674998
log Tang u	=	10,5751588
u	=	75° 6′ 20″
log Cosin u	=	9,4099992
log Sin η	=	9,8181173
Summe	=	19,2281165
log Sin δ	=	9,3226849
log Cosin z	=	9,9054316
z	=	36° 27′ 18″
u	=	75. 6. 20.
$90° - \varepsilon = u - z$ (*wird hier genommen*)	=	38. 39. 2.
ε	=	51. 20. 58.

Beyspiel 2.

$\delta = 4^\circ \; 4' \; 19''$ Südlich.
$\eta = 28. \; 36. \; 28.$
$\tau = 33. \; 17. \; 30.$

Rechnung nach der ersten Auflösungsart.

log Cosin δ	=	9,9989024
log Sin τ	=	9,7394942
Summe	=	19,7383966
log Cosin η	=	9,9434539
log Sin B	=	9,7949427
gehört zu		$38^\circ \; 35' \; 0''$
subtr. von		180. 0. 0.
B	=	141. 25. 0.
τ	=	33. 17. 30.
$\tau + B$	=	174. 42. 30.
$\frac{1}{2}(\tau + B)$	=	87. 21. 15.
$B - \tau$	=	108. 7. 30.
$\frac{1}{2}(B - \tau)$	=	54. 3. 45.
η	=	28. 36. 28.
δ	=	— 4. 4. 19.
$\eta + \delta$	=	24. 32. 9.
$\frac{1}{2}(\eta + \delta)$	=	12. 16. 4,5.
log Cosin $\frac{1}{2}(\tau + B)$	=	8,6642854
log Cotang $\frac{1}{2}(\eta + \delta)$	=	10,6626431
Summe	=	19,3269285
log Cosin $\frac{1}{2}(\tau - B)$	=	9,7685659
log Tang $\frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon)$	=	9,5583626
$\frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon)$	=	$19^\circ \; 53' \; 8,3''$
$90^\circ - \varepsilon$	=	39. 46. 16,6.
ε	=	50. 13. 43,4.

die gesuchte Polhöhe.

Rechnung nach der zweyten Auflösungsart.

log Cosin r =	9,9221477
log Cotang δ =	11,1475590
log — Tang u =	11,0697067
u =	180° − 85° 7′ 55″
=	94° 52′ 5″
log — Cosin u =	8,9287102
log Sin η =	9,6801719
Summe =	18,6088821
log — Sin δ =	8,8513431
log + Cosin z =	9,7575390
z =	55° 5′ 50″
u =	94. 52. 5.
90° − ε = u − z =	39. 46. 15.
ε =	50. 13. 45.

Vierte Aufgabe.

Aus der Nördlichen Polhöhe $= \varepsilon$, der Abweichung eines Gestirns $= \delta \left\{ \begin{matrix} \text{Nördl.} + \\ \text{Südl.} - \end{matrix} \right\}$ und der Höhe desselben $= \eta$; das Azimuth $= \alpha$ zu bestimmen.

Auflösung.

$$\left.\begin{matrix} SP = 90^\circ - \delta = a \\ SZ = 90^\circ - \eta = b \\ ZP = 90^\circ - \varepsilon = c \\ SZP = 180^\circ - \alpha = x \end{matrix}\right| \quad \frac{a+b+c}{2} = S \quad \Big| \text{ Man sehe Taf. II, Fig. XX.}$$

Dies ist also der erste Fall schiefwinklichter Kugeldreiecke, und demnach

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Sin}(S-b) \cdot \operatorname{Sin}(S-c)}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c} \right)}$$

Das gesuchte Azimuth $\alpha = 180^\circ - x$ ist $\left\{ \begin{matrix} \text{östlich, } \textit{orientale} \\ \text{westlich, } \textit{occidentale} \end{matrix} \right\}$ je nachdem die Sonne oder der Stern $\left\{ \begin{matrix} \text{vor} \\ \text{nach} \end{matrix} \right\}$ dem Durchgange durch den Mittagskreis beobachtet wird.

Nach der Formel für Sin $\frac{1}{2}$ x liesse sich nun in jedem Falle die Rechnung anstellen; doch läßt sich noch eine andere bequemere Rechnungsart aus selbiger so herleiten: Es ist

$$S - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{90^\circ - \delta + \eta - \varepsilon}{2}$$

also

$$\operatorname{Sin}(S-b) = \operatorname{Sin}\left(\frac{90^\circ - \delta + \eta - \varepsilon}{2}\right) = \operatorname{Cos}\left(\frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2}\right)$$

Ferner ist

$$S-c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} - \delta$$

also

$$\text{Sin}\,(S-c) = \text{Sin}\left(\frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} - \delta\right)$$

Endlich ist:

$$\text{Sin } b = \text{Cosin } \eta$$
$$\text{Sin } c = \text{Cosin } \varepsilon$$
$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} x = \text{Cosin } \tfrac{1}{2} \omega$$

Dahero

$$\frac{\varepsilon + (90^\circ - \eta) + \delta}{2} = u \textit{ gesetzt}$$

$$\text{Cosin } \tfrac{1}{2} \omega = \sqrt{\left(\frac{\text{Cosin } u \,.\, \text{Sin}\,(u - \delta)}{\text{Cosin } \varepsilon \,.\, \text{Cosin } \eta}\right)}$$

Fünfte Aufgabe.

Es ist gegeben eines Gestirns Höhe $= \eta$, *Abweichung* $= \delta \left\{ \begin{matrix} \text{Nördl.} + \\ \text{Südl.} - \end{matrix} \right\}$ *und Azimuth* $= \alpha$ Oestlich oder Westlich; *man verlangt den Stundenwinkel* $= \tau$ *und folglich die wahre Zeit der Beobachtung* $=$ z.

Auflösung.

Dies ist Fall 7 schiefwinklichter Kugeldreiecke, folglich

$$\left. \begin{aligned} 180^\circ - \alpha &= A \\ 90^\circ - \delta &= a \\ 90^\circ - \eta &= b \\ \tau &= B \end{aligned} \right|$$

Man sehe Tafel II. Fig. XXI.

$$\text{Sin B} = \frac{\text{Sin b . Sin A}}{\text{Sin a}}$$

das ist

$$\text{Sin } \tau = \frac{\text{Cosin } \eta \text{ . Sin } \alpha}{\text{Cosin } \delta}$$

τ = in Graden des Aequators
= in Zeit der ersten Bewegung
z = Culmination des $* \mp \tau$ in Zeit

wenn α $\left\{ \begin{matrix} \text{östlich} \\ \text{westlich} \end{matrix} \right\}$ ist.

Bey den Sonnenhöhen ist τ gewöhnlich spitzig, also da nicht zweydeutig.

Sechste Aufgabe.

Es ist eines Gestirns wahre Höhe = η, Abweichung = $\delta \left\{\begin{matrix} \text{No.} + \\ \text{Sü.} - \end{matrix}\right\}$ und Azimuth = α, Oestlich oder Westlich gegeben; man verlangt die Nördliche Polhöhe = ε zu wissen.

Auflösung.

Es ist dies Fall 9 schiefwinklichter Kugeldreiecke, und der Nebenwinkel oder das Supplement des Azimuths

$SZP = 180° - \alpha = A$	Man sehe
$SZ = 90° - \eta = b$	Tafel II.
$SP = 90° - \delta = a$	Fig. XXI.
Man sucht $ZP = 90° - \varepsilon = c$.	Daher ist:

Die erste Auflösungsart.

$$\text{Sin B oder Sin } \tau = \frac{\text{Sin b . Sin A}}{\text{Sin a}}$$

$$= \frac{\text{Cosin } \eta \text{ . Sin } \alpha}{\text{Cosin } \delta}$$

und

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Cosin } \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ . Tang } \tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Cosin } \tfrac{1}{2}(A-B)}$$

oder

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2}(90° - \varepsilon) = \frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2}(\alpha - \tau) \text{ . Cotang } \tfrac{1}{2}(\eta + \delta)}{\text{Sin } \tfrac{1}{2}(\alpha + \tau)}$$

Bey den Sonnenhöhen ist τ gewöhnlich spitzig, also findet bey diesen keine Zweydeutigkeit statt.

Die zweyte Auflösungsart.

$$\text{Tang } u = \text{Cosin } A . \text{Tang } b = -\text{Cosin } \alpha . \text{Cotang } \eta;$$

$$\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } u . \text{Cosin } a}{\text{Cosin } b} = \frac{\text{Cosin } u . \text{Sin } \delta}{\text{Sin } \eta};$$

$$u \pm z = c = 90^\circ - \varepsilon.$$

Man nimmt die Summe $u + z$ wenn die Winkel A und B, die den gegebenen Seiten a und b gegenüberſtehen, gleichartig ſind; den Unterſchied $u - z$ hingegen wenn dieſe Winkel ungleichartig ſind. Da nun bey Sonnenhöhen gewöhnlich A ſtumpf und B ſpitzig iſt, ſo fällt in dieſem Falle die Zweydeutigkeit weg, und man hat $u - z = 90^\circ - \varepsilon$.

Beyſpiel 1. Für die Sonne.

$\eta = 38^\circ\ 18'\ 46''$ Vorm. oder Nachmittage.
$\delta = 19.\ 39.\ 10.$ Nördlich.
$\alpha = 72.\ 12.\ 54.$ Oeſtlich oder Weſtlich.

Rechnung nach der erſten Auflöſungsart.

$\log \text{Cos } \eta = 9{,}894\,6694$	$\log \text{Sin } \frac{1}{2}(\alpha - \tau) = 9{,}233\,4995$
$\log \text{Sin } \alpha = 9{,}978\,7325$	$\log \text{Cot } \frac{1}{2}(\eta + \delta) = 10{,}256\,5559$
Summe $= 19{,}873\,4019$	Summe $= 19{,}490\,0554$
$\log \text{Cos } \delta = 9{,}973\,9347$	$\log \text{Sin } \frac{1}{2}(\alpha + \tau) = 9{,}947\,3649$
$\log \text{Sin } \tau = 9{,}899\,4672$	$\log \text{Tang} \frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon) = 9{,}542\,6905$
$\tau = 52^\circ\ 30'\ 0''$	$\frac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon) = 19^\circ\ 14'\ 0{,}4''$
$\alpha = 72.\ 12.\ 54.$	$90^\circ - \varepsilon = 38.\ 28.\ 0{,}8.$
$\alpha - \tau = 19.\ 42.\ 54.$	$\varepsilon = 51.\ 31.\ 59{,}2.$
$\frac{1}{2}(\alpha - \tau) = 9.\ 51.\ 27.$	die geſuchte Nördliche Polhöhe.
$\alpha + \tau = 124.\ 42.\ 54.$	
$\frac{1}{2}(\alpha + \tau) = 62.\ 21.\ 27.$	
$\eta + \delta = 57.\ 57.\ 56.$	
$\frac{1}{2}(\eta + \delta) = 28.\ 58.\ 58.$	

Rechnung nach der zweyten Auflösungsart.

log Cosin α =	9,4849345
log Cotang η =	10,1023099
log − Tang 21° 8′ 9″ =	9,5872444
u =	158° 51′ 51″
log Cosin u =	9,9697551
log Sin δ =	9,5267517
Summe =	19,4965068
log Sin η =	9,7923595
log − Cosin 59° 36′ 9″ =	9,7041473
z =	120° 23′ 51″
u =	158. 51. 51.
90° − ε = u − z =	38. 28. 0.
ε =	51. 32. 0.

Beyspiel 2. Für die Sonne.

η = 20° 10′ 0″
δ = 19. 39. 10. Südlich.
α = 33. 1. 43.

Rechnung nach der zweyten Auflösungsart.

log Cosin α =	9,9234505
log Cotang η =	10,4350169
log − Tang 66° 20′ 37″ =	10,3584674
u =	113° 39′ 23″
log − Cosin u =	9,6034158
log − Sin δ =	9,5267517
Summe =	19,1301675
log Sin η =	9,5375070
log + Cosin 66° 57′ 22″ =	9,5926605
z =	66° 57′ 22″
u =	113. 39. 23.
90° − ε = u − z =	46. 42. [illegible]
ε =	43. 17. 59.

Methoden

die

Länge und Breite eines Sterns

aus der

geraden Auffteigung und Abweichung

deffelben

und umgekehrt

zu berechnen.

Bedeutung der Buchſtaben.

λ Länge des Sterns.

β Breite $\begin{cases} \text{Nördl.} + \\ \text{Südl.} - \end{cases}$

α Gerade Aufſteigung.

δ Abweichung $\begin{cases} \text{Nördl.} + \\ \text{Südl.} - \end{cases}$

θ Schiefe der Ekliptik.

r Halbmeſſer.

Hülfstafel

zur Verwandlung der trigonometriſchen Linien des zweyten, dritten und vierten Quadranten in die des erſten Quadranten.

$$x < 90^\circ$$
$$R = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
\text{Sin } x &= +\text{Sin }(2R - x) &&= +\text{Cosin }(R - x)\\
&= -\text{Sin }(2R + x) &&= -\text{Cosin }(R + x)\\
&= -\text{Sin }(4R - x) &&= -\text{Cosin }(3R - x)\\
& &&= +\text{Cosin }(3R + x)\\
\text{Cosin } x &= -\text{Cosin }(2R - x) &&= +\text{Sin }(R - x)\\
&= -\text{Cosin }(2R + x) &&= +\text{Sin }(R + x)\\
&= +\text{Cosin }(4R - x) &&= -\text{Sin }(3R - x)\\
& &&= -\text{Sin }(3R + x)\\
\text{Tang } x &= -\text{Tang }(2R - x) &&= +\text{Cotang }(R - x)\\
&= +\text{Tang }(2R + x) &&= -\text{Cotang }(R + x)\\
&= -\text{Tang }(4R - x) &&= +\text{Cotang }(3R - x)\\
& &&= -\text{Cotang }(3R + x)\\
\text{Cotang } x &= -\text{Cotang }(2R - x) &&= +\text{Tang }(R - x)\\
&= +\text{Cotang }(2R + x) &&= -\text{Tang }(R + x)\\
&= -\text{Cotang }(4R - x) &&= +\text{Tang }(3R - x)\\
& &&= -\text{Tang }(3R + x)
\end{aligned}$$

Anmerkung.

Wenn die gerade Aufſteigung des Sterns in dem erſten oder in dem vierten Quadranten des Aequators ſich befindet, ſo fällt die Länge des Sterns nie in den zweyten oder dritten Quadranten der Ekliptik.

Iſt hingegen die gerade Aufſteigung in dem zweyten oder dritten Quadranten, ſo wird die Länge niemals in den erſten oder vierten Quadranten fallen.

Erste Methode die Länge zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}{\text{Sin}\,\alpha}$ positiv;

$$\text{Tang u} = \sqrt{\left(\frac{\text{r}\,.\,\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}{\text{Sin}\,\alpha}\right)};$$

$$\text{Tang}\,\lambda = \frac{\text{r}\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\alpha}{\text{Cosin u}\,.\,\text{Cosin u}}.$$

Fall. 2. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}{\text{Sin}\,\alpha}$ negativ, und

$$-\frac{\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}{\text{Sin}\,\alpha} < \text{r}:$$

$$\text{Cosin u} = \sqrt{\left(-\frac{\text{r}\,.\,\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}{\text{Sin}\,\alpha}\right)};$$

$$\text{Tang}\,\lambda = \frac{\text{Sin u}\,.\,\text{Sin u}\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\alpha}{\text{r}^3}.$$

Fall 3. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}{\text{Sin}\,\alpha}$ negativ, und

$$-\frac{\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}{\text{Sin}\,\alpha} > \text{r}:$$

$$\text{Cosin u} = \sqrt{\left(-\frac{\text{r}^3\,.\,\text{Sin}\,\alpha}{\text{Tang}\,\delta\,.\,\text{Tang}\,\theta}\right)};$$

$$\text{Tang}\,\lambda = -\frac{\text{Tang u}\,.\,\text{Tang u}\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\alpha}{\text{r}^3}$$

Erste Methode die Breite zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\alpha}{\text{Tang}\,\delta}$ positiv und $< r$:

$$\text{Cosin}\,u = r\left(\frac{r\,.\ \text{Tang}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\alpha}{\text{Tang}\,\delta}\right);$$

$$\text{Sin}\ \beta = \frac{\text{Sin}\,u\,.\ \text{Sin}\,u\,.\ \text{Cosin}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\delta}{r^3}.$$

Fall 2. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\alpha}{\text{Tang}\,\delta}$ positiv und $> r$:

$$\text{Cosin}\,u = r\left(\frac{r^3\,.\ \text{Tang}\,\delta}{\text{Tang}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\alpha}\right);$$

$$\text{Sin}\ \beta = -\ \frac{\text{Tang}\,u\,.\ \text{Tang}\,u\,.\ \text{Cosin}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\delta}{r^3}.$$

Fall 3. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\alpha}{\text{Tang}\,\delta}$ negativ:

$$\text{Tang}\,u = r\left(-\ \frac{r\,.\ \text{Tang}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\alpha}{\text{Tang}\,\delta}\right);$$

$$\text{Sin}\ \beta = \frac{r\,.\ \text{Cosin}\,\theta\,.\ \text{Sin}\,\delta}{\text{Cosin}\,u\,.\ \text{Cosin}\,u},$$

Zweyte Methode die Länge zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \,.\, \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta}; \quad \text{Tang } \lambda = \frac{\text{Tang } \alpha \,.\, \text{Sin } (u + \theta)}{\text{Sin } u}.$$

Zweyte Methode die Breite zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \,.\, \text{Sin } \alpha}{\text{Tang } \delta}; \quad \text{Sin } \beta = \frac{\text{Sin } \delta \,.\, \text{Cosin } (u + \theta)}{\text{Cosin } u}.$$

Oder

$$\text{Tang } u = \frac{r \,.\, \text{Sin } \alpha}{\text{Cotang } \theta}; \quad \text{Sin } \beta = \frac{\text{Cosin } \theta \,.\, \text{Sin } (\delta - u)}{\text{Cosin } u}.$$

Dritte Methode die Länge zu finden.

Nach Fall 3 schiefwinklichter Kugeldreiecke num. 7. Seite 81 ist:

$b = \theta$ oder $= 90° - \delta$ die grösere Seite.

$c = 90° - \delta$ oder $= \theta$ die kleinere Seite.

$A = 90° + \alpha$

und wenn b als die grösere Seite $= 90° - \delta$, der gesuchte Winkel

$$90° - \lambda = \tfrac{1}{2}(B + C) + \tfrac{1}{2}(B - C) = B;$$

wenn aber c als die kleinere Seite $= 90° - \delta$, der gesuchte Winkel

$$90° - \lambda = \tfrac{1}{2}(B + C) - \tfrac{1}{2}(B - C) = C.$$

Dritte Methode die Breite zu finden.

Nach Fall 4 ſchiefwinklichter Kugeldreiecke Formel 4. Seite 82 iſt:

$a = 90° - \delta$ oder $= \theta$, allezeit die gröſsere Seite
$c = \theta$ oder $= 90° - \delta$, — — kleinere —
$B = 90° + \alpha$
$b = 90° - \beta$

Oder nach Fall 4 ſchiefwinklichter Kugeldreiecke Fo. 5. Seite 82 kann man ſetzen:

$a = 90° - \delta$; $c = \theta$; $B = 90° + \alpha$; $b = 90° - \beta$.

Vierte Methode die Länge und Breite zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cotang } \tfrac{1}{2}(90° + \alpha) . \text{ Sin } (\theta \backsim (90° - \delta))}{\text{Sin } (\theta + (90° - \delta))}$$

Groſses Segment $= \frac{1}{2}(90° + \alpha) + u$
Kleines Segment $= \frac{1}{2}(90° + \alpha) - u$

$$\text{Tang } \lambda = \frac{\text{Cosin } \theta . \text{ Tang des } \left\{ \begin{matrix} \text{groſsen} \\ \text{kleinen} \end{matrix} \right\} \text{ Segments}}{r}$$

In dieſer letzten Gleichung nimmt man, wenn $\theta \left\{ \begin{matrix} \text{gröſser} \\ \text{kleiner} \end{matrix} \right\}$ als $90° - \delta$ iſt, das $\left\{ \begin{matrix} \text{groſse} \\ \text{kleine} \end{matrix} \right\}$ Segment; und wenn das kleine Segment negativ und $< 90°$ ſich findet, ſo ſetzt man die Tangente dieſes Segments negativ.

$$\text{Cosin } \beta = \frac{\text{Cosin } \alpha . \text{ Cosin } \delta}{\text{Cosin } \lambda}$$

Fünfte Methode die Länge und Breite zu finden.

Wenn die gerade Aufſteigung α in dem 2ten Quadranten ſich befindet, ſo gebraucht man in den folgenden Formeln $180° - \alpha$ anſtatt der gegebenen α. Iſt α im

3ten Quadranten, so nimmt man $\alpha - 180^\circ$ statt α; und wenn α in 4ten Quadranten fällt, so bedient man sich für α des Bogens $360^\circ - \alpha$.

Nach dieser Vorbereitung geben folgende Formeln die Auflösung:

I. $\text{Cotang } x = \frac{\text{Sin } \alpha \,.\, \text{Cotang } \delta}{r}$

$x \pm \theta = y$

der Unterschied, wenn δ und α, beyde Nördlich, oder Südlich sind; die Summe im entgegengesetzten Falle. Es heisst aber α *Nö.* von $0^\circ - 180^\circ$ und *Sü.* von $180^\circ - 360^\circ$. Noch ist, wenn man den Unterschied nimmt, der folgenden Num. IV. wegen, anzumerken, ob $\theta <$ oder $>$ x ist.

II. $\text{Cosin } z = \frac{\text{Cosin } \alpha \,.\, \text{Cosin } \delta}{r}$

III. $\text{Tang } \lambda = \frac{\text{Cosin } y \,.\, \text{Tang } z}{r}$

a) In dem 1sten Quadranten von α ist λ die gesuchte Länge;

Im 2ten Quad. v. α, ist diese Länge $= 6\,Z - \lambda$;
— 3. — — — — — $= 6\,Z + \lambda$;
— 4. — — — — — $= 12\,Z - \lambda$;
dies gilt wenn y spitzig ist.

b) Ist aber $y > 90^\circ$, so gebraucht man in der Rechnung, desselben Supplement, und es ist

Im 1sten Quadranten von α:
die gesuchte Länge $= 12\,Z - \lambda$;
Im 2ten Quadranten von α:
die gesuchte Länge $= 6\,Z + \lambda$;
Im 3ten Quadranten von α:
die gesuchte Länge $= 6\,Z - \lambda$;
Im 4ten Quadranten von α:
die gesuchte Länge $= \lambda$.

$$\text{IV. } \sin\beta = \frac{\sin y \,.\, \sin z}{r}$$

β ist mit δ von einerley Benennung, ausgenommen wenn in I. x von θ, um y zu finden, hat subtrahirt werden müssen, indem $\theta > x$ gefunden ward.

Sechste Methode die Länge und Breite zu finden.

Anstatt der gegebenen geraden Aufsteigung α, nimmt man den Abstand vom nächsten Aequinoktialpunkte. Nemlich

Für α	gebraucht man
im 1sten Quadranten	α
— 2ten — —	$180° - \alpha$
— 3ten — —	$\alpha - 180°$
— 4ten — —	$360° - \alpha$.

Nun löst man folgende Gleichungen auf:

$$\text{I) } \operatorname{Tang} u = \frac{\sin\alpha \,.\, \operatorname{Cotang}\delta}{r}$$

$$u \pm \theta = z$$

die Summe im 1sten und 2ten Quadranten von α, der Unterschied im 3ten und 4ten.

$$\text{II) } \sin\beta = \frac{\operatorname{Cosin} z \,.\, \sin\delta}{\operatorname{Cosin} u}$$

β ist mit δ von einerley Benennung, ausgenommen wenn z und u ungleichartig sind.

$$\text{III) } \operatorname{Cotang} x = \frac{\sin z \,.\, \operatorname{Tang}\alpha}{\sin u}; \textit{ Oder:}$$

$$\operatorname{Cosin} x = \frac{\operatorname{Tang}\beta \,.\, \operatorname{Tang} z}{r}.$$

In den beyden letzten Quadranten von α ist x stumpf wenn u $>\theta$. Endlich hat man

Im 1sten Quadranten von α:

$\lambda = 3\,Z - x$;

Im 2ten und 3ten Quadranten von α:

$\lambda = 3\,Z + x$;

Im 4ten Quadranten von α:

$\lambda = 3\,Z - x$ für $x < 90°$

$= 15\,Z - x$ für x stumpf.

Siebente Methode die Länge und Breite zu finden.

A) Wenn die Rectascension in 1sten und 2ten Quadranten fällt:

$$\text{Tang}\tfrac{1}{2}[x+(90°-\lambda)] = \frac{\text{Cos}[\frac{1}{2}(\theta+\delta)-45°].\text{Tang}(45°-\frac{1}{2}\alpha)}{\text{Cosin}[\frac{1}{2}(\theta-\delta)+45°]};$$

$$\text{Tang}\tfrac{1}{2}[x-(90°-\lambda)] = -\frac{\text{Sin}[\frac{1}{2}(\theta+\delta)-45°].\text{Tang}(45°-\frac{1}{2}\alpha)}{\text{Sin}[\frac{1}{2}(\theta-\delta)+45°]};$$

$$\tfrac{1}{2}[x+(90°-\lambda)] - \tfrac{1}{2}[x-(90°-\lambda)] = 90°-\lambda;$$

$$\text{Cosin}\,\beta = \frac{\text{Cosin}\,\alpha\,.\,\text{Cosin}\,\delta}{\text{Cosin}\,\lambda}.$$

B) Wenn die Rectascension im 3ten und 4ten Quadranten ist:

$$\text{Tang}\tfrac{1}{2}[x+(\lambda-90°)] = \frac{\text{Cos}[\frac{1}{2}(\theta+\delta)-45°].\text{Tang}(\frac{1}{2}\alpha-45°)}{\text{Cosin}[\frac{1}{2}(\theta-\delta)+45°]};$$

$$\text{Tang}\tfrac{1}{2}[x-(\lambda-90°)] = \frac{\text{Sin}[\frac{1}{2}(\theta+\delta)-45°].\text{Tang}(\frac{1}{2}\alpha-45°)}{\text{Sin}[\frac{1}{2}(\theta-\delta)+45°]};$$

$$\tfrac{1}{2}[x+(\lambda-90°)] - \tfrac{1}{2}[x-(\lambda-90°)] = \lambda-90°;$$

$$\text{Cosin}\,\beta = \frac{\text{Cosin}\,\alpha\,.\,\text{Cosin}\,\delta}{\text{Cosin}\,\lambda}.$$

Achte Methode die Lange und Breite zu finden.

A) Wenn die Rectascension α unter 180° ist:

$$\text{Sin}\,\beta = \text{Sin}\,(\delta - \theta) + (1 - \text{Sin}\,\alpha).\ \text{Sin}\,\theta\,.\ \text{Cosin}\,\delta;$$

$$\text{Cosin}\,\lambda = \frac{\text{Cosin}\,\alpha.\ \text{Cosin}\,\delta}{\text{Cosin}\,\beta}.$$

B) Wenn die Rectascension über 180° beträgt:

$$\text{Sin}\,\beta = \text{Sin}\,(\delta + \theta) - (1 + \text{Sin}\,\alpha).\ \text{Sin}\,\theta\,.\ \text{Cosin}\,\delta;$$

$$\text{Cosin}\,\lambda = \frac{\text{Cosin}\,\alpha.\ \text{Cosin}\,\delta}{\text{Cosin}\,\beta}.$$

Neunte Methode die Länge und Breite zu finden.

$$\text{Tang}\,u = \frac{\text{Sin}\,\alpha\,.\ \text{Cotang}\,\delta}{r}$$

$$\text{Sin}\,\beta = \frac{\text{Sin}\,\delta\,.\ \text{Cosin}\,(\theta + u)}{\text{Cosin}\,u}$$

$$\text{Sin}\,\lambda = \frac{\text{Tang}\,\beta\,.\ \text{Tang}\,(\theta + u)}{r}$$

Erste Methode die gerade Auffteigung zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\beta}{\text{Sin}\,\lambda}$ bejaht u. $<$ r:

$$\text{Cosin}\,u = r\left(\frac{r\,.\,\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\beta}{\text{Sin}\,\lambda}\right);$$

$$\text{Tang}\,\alpha = \frac{\text{Sin}\,u\,.\,\text{Sin}\,u\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\lambda}{r^3}.$$

Fall 2. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\beta}{\text{Sin}\,\lambda}$ bejaht u. $>$ r:

$$\text{Cosin}\,u = r\left(\frac{r^3\,.\,\text{Sin}\,\lambda}{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\beta}\right);$$

$$\text{Tang}\,\alpha = -\frac{\text{Tang}\,u\,.\,\text{Tang}\,u\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\lambda}{r^3}$$

Fall 3. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\beta}{\text{Sin}\,\lambda}$ verneint:

$$\text{Tang}\,u = r\left(-\frac{r\,.\,\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\beta}{\text{Sin}\,\lambda}\right);$$

$$\text{Tang}\,\alpha = \frac{r\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Tang}\,\lambda}{\text{Cosin}\,u\,.\,\text{Cosin}\,u}.$$

Erſte Methode die Abweichung zu finden.

Fall 1. Wenn $\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\lambda}{\text{Tang}\,\beta}$ bejaht.

$$\text{Tang}\,u = r\left(\frac{r\,.\,\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\lambda}{\text{Tang}\,\beta}\right);$$

$$\text{Sin}\,\delta = \frac{r\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\beta}{\text{Cosin}\,u\,.\,\text{Cosin}\,u}.$$

Fall 2. Wenn $-\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\lambda}{\text{Tang}\,\beta}$ bejaht und $< r$:

$$\text{Cosin}\,u = r\left(-\frac{r\,.\,\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\lambda}{\text{Tang}\,\beta}\right);$$

$$\text{Sin}\,\delta = \frac{\text{Sin}\,u\,.\,\text{Sin}\,u\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\beta}{r^3}.$$

Fall 3. Wenn $-\frac{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\lambda}{\text{Tang}\,\beta}$ bejaht und $> r$:

$$\text{Cosin}\,u = r\left(-\frac{r^3\,.\,\text{Tang}\,\beta}{\text{Tang}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\lambda}\right);$$

$$\text{Sin}\,\delta = -\frac{\text{Tang}\,u\,.\,\text{Tang}\,u\,.\,\text{Cosin}\,\theta\,.\,\text{Sin}\,\beta}{r^3}.$$

Zweyte Methode die gerade Aufsteigung zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \beta}; \quad \text{Tang } \alpha = -\frac{\text{Tang } \lambda \cdot \text{Sin } (u-\theta)}{\text{Sin } u}.$$

Zweyte Methode die Abweichung zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Tang } \beta}; \quad \text{Sin } \delta = \frac{\text{Sin } \beta \cdot \text{Cosin } (u-\theta)}{\text{Cosin } u}.$$

Oder

$$\text{Tang } u = \frac{r \cdot \text{Sin } \lambda}{\text{Cotang } \theta}; \quad \text{Sin } \delta = \frac{\text{Cosin } \theta \cdot \text{Sin } (u+\beta)}{\text{Cosin } u}.$$

Dritte Methode die gerade Aufsteigung zu finden.

Fall 3 schiefwinklichter Kugeldreiecke num. 7. Seite 81 setzt man:

$b = 90° - \beta$ oder $= \theta$ größere } Seite.
$c = \theta$ oder $= 90° - \beta$ kleinere }
$A = 90° - \lambda$.

Ist nun die *größere* Seite $b = 90° - \beta$; so ist der gesuchte Winkel:

$$90° + \alpha = \tfrac{1}{2}(B+C) + \tfrac{1}{2}(B-C) = B.$$

Hingegen wenn die *kleinere* Seite $c = 90° - \beta$; so ist der gesuchte Winkel:

$$90° + \alpha = \tfrac{1}{2}(B+C) - \tfrac{1}{2}(B-C) = C.$$

Dritte Methode die Abweichung zu finden.

Fall 4 schiefwinklichter Kugeldreiecke Formel 4, Seite 82 setze man

$a = 90° - \beta$ oder $= \theta$ allemal der grössern } Seite gleich.
$c = \theta$ oder $= 90° - \beta$ — — kleinern }
$B = 90° - \lambda$;
$b = 90° - \delta$.

Oder Fall 4 schiefwinklichter Kugeldreiecke Formel 5, Seite 82 wird gesetzt:

$a = 90° - \beta$; $c = \theta$; $B = 90° - \lambda$; $b = 90° - \delta$.

Vierte Methode die gerade Aufsteigung und Abweichung zu finden.

$$\text{Tang } u = \frac{\text{Cotang } \frac{1}{2}(90° - \lambda) \cdot \text{Sin}(\theta \backsim (90° - \beta))}{\text{Sin}(\theta + (90° - \beta))};$$

$$\text{Grosses Segment} = \tfrac{1}{2}(90° - \lambda) + u;$$

$$\text{Kleines Segment} = \tfrac{1}{2}(90° - \lambda) - u;$$

$$\text{Tang } \alpha = -\frac{\text{Cosin } \theta \cdot \text{Tang des } \left\{\begin{matrix}\text{grossen}\\ \text{kleinen}\end{matrix}\right\} \text{Segments}}{r};$$

In dieser letztern Gleichung gebraucht man, wenn $\theta \left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als $90° - \beta$ ist, das $\left\{\begin{matrix}\text{grosse}\\ \text{kleine}\end{matrix}\right\}$ Segment; und wenn das kleine Segment negativ und $< 90°$ erhalten wird, so setzt man die Tangente dieses Segments negativ.

$$\text{Cosin } \delta = \frac{\text{Cosin } \lambda \cdot \text{Cosin } \beta}{\text{Cosin } \alpha}$$

Fünfte Methode die gerade Auffteigung und Abweichung zu finden.

Ift die gegebene Länge λ im 2ten Quadranten, fo nimmt man $180^\circ - \lambda$ oder $6\,Z - \lambda$; ift fie im 3ten Quadranten, fo nimmt man $\lambda - 180^\circ$ oder $\lambda - 6\,Z$; und wenn fie im 4ten Quadranten ift, fo gebraucht man $360^\circ - \lambda$ oder $12\,Z - \lambda$, ftatt λ in den folgenden nun zu berechnenden Gleichungen:

$$\text{I. Cotang } x = \frac{\text{Sin } \lambda \,.\, \text{Cotang } \beta}{r}$$

$$x \pm \theta = y$$

man nimmt die Summe wenn der Stern in den 6 erften Zeichen ift und eine Nördliche Breite hat, desgleichen wenn er in den 6 letzten Zeichen ift, und eine Südliche Breite hat;
man nimmt den Unterfchied wenn in den 6 erften Zeichen der Länge der Stern eine Südliche Breite hat, desgleichen wenn er in den 6 letzten Zeichen der Länge ift, und eine Nördliche Breite hat.

$$\text{II. Cosin } z = \frac{\text{Cosin } \lambda \,.\, \text{Cosin } \beta}{r}$$

$$\text{III. Tang } \alpha = \frac{\text{Cosin } y \,.\, \text{Tang } z}{r}.$$

a) *Wird* $y < 90^\circ$ *erhalten*, fo ift der num. III. gefundene Bogen α, wenn die gegebene Länge λ in den erften Quadranten fällt, die gefuchte gerade Auffteigung.

Fällt aber die Länge λ in den 2ten Quadranten, fo ift die gerade Auffteigung $180^\circ - \alpha$.

Fällt λ in den 3ten Quadranten, fo ift die gefuchte Rectafcenfion $= 180^\circ + \alpha$. Und endlich

Für λ in dem 4ten Quadranten, wird die gefuchte gerade Auffteigung $= 360^\circ - \alpha$ feyn.

b) *Kömmt* y > 90° *heraus*, so gebraucht man 180° — y, und dann ist

In dem 1sten Quadranten von λ:
die gesuchte gerade Aufsteigung = 360° — α;
In dem 2ten Quadranten von λ:
die gesuchte gerade Aufsteigung = 180° + α;
Im 3ten Quadranten von λ:
die gesuchte gerade Aufsteigung = 180° — α;
Im 4ten Quadranten von λ:
die gesuchte gerade Aufsteigung = α.

IV. $\text{Sin}\,\delta = \frac{\text{Sin}\,y\,.\,\text{Sin}\,z}{r}$

die gesuchte Abweichung δ ist mit der gegebenen Breite β von einerley Benennung; den Fall ausgenommen da x in I, von θ subtrahirt werden muſste, weil θ > x war.

Drey Beyſpiele zur 1ſten Methode λ zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ 28' 40''$; $\delta = +88^\circ 10' 50''$ d.i. Nö. $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$$
\begin{aligned}
10 + \log \text{Tang}\,\delta &= 21,4980378 \\
+ \log \text{Tang}\,\theta &= 9,6376106 \\
\hline
\text{Summe} &= 31,1356484 \\
- \log \text{Sin}\,\alpha &= 9,3345763 \\
\hline
2.\log \text{Tang}\,u &= 21,8010721 \\
\log \text{Tang}\,u &= 10,9005360 \\
u &= 82^\circ\ 50'\ 0,22''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10 + \log \text{Cosin}\,\theta &= 19,9625076 \\
+ \log \text{Tang}\,\alpha &= 9,3449574 \\
\hline
\text{Summe} &= 29,3074650 \\
- 2.\log \text{Cosin}\,u &= 18,1921156 \\
\hline
\log \text{Tang}\,\lambda &= 11,1153494 \\
\lambda &= 85^\circ\ 36'\ 55,65'' \\
&= 2\,\text{Z}.\ 25.\ 36.\ 55,65. \\
&= \text{♊}\ 25.\ 36.\ 55,65.
\end{aligned}
$$

---

2) $\alpha = 139^\circ 18' 30''$; $\delta = -7^\circ 45' 0''$ d.i. Sü. $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$$
\begin{aligned}
\log \text{Tang}\,\delta &= 9,1338391 \\
\log \text{Tang}\,\theta &= 9,6376106 \\
\hline
\text{Summe} &= 18,7714497 \\
\log \text{Sin}\,40^\circ\ 41'\ 30'' &= 9,8142397 \\
\hline
2.\log \text{Cosin}\,u &= 18,9572100 \\
\log \text{Cosin}\,u &= 9,4786050 \\
u &= 72^\circ\ 28'\ 50,6''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\log \text{Sin}\,u &= 19,9587468 \\
\log \text{Cosin}\,\theta &= 9,9625076 \\
\log \text{Tang}\,40^\circ\ 41'\ 30'' &= 9,9344392 \\
\hline
\log \text{Tang}\,35^\circ\ 39'\ 5'' &= 9,8556936 \\
\text{ſubtr. von } 180.\ 0.\ 0. & \\
\hline
\lambda = 144.\ 20.\ 55. &= 4\,\text{Z}.\ 24^\circ\ 20'\ 55'' \\
&= \text{♌}\ 24.\ 20.\ 55.
\end{aligned}
$$

3) $\alpha = 359°\ 22'\ 33''$; $\delta = +27°\ 55'\ 37''$ d. i. Nö. $\theta = 23°\ 28'\ 0''$

log Tang δ =	9,7243373
log Tang θ =	9,6376106
Summe =	19,3619479
30 + log Sin 0° 37′ 27″ =	38,0371693
2. log Cosin u =	18,6752214
log Cosin u =	9,3376107
u =	77° 26′ 0″
2. log Tang u =	21,3037186
log Cosin θ =	9,9625076
log Cotang 89° 22′ 33″ =	8,0371951
log Tang λ =	9,3034213
λ =	11° 22′ 14,72″
=	0 Z. 11. 22. 14,72.
=	♈ 11. 22. 14,72.

Drey Beyſpiele zur 2ten Methode λ zu finden.

1) $\alpha = 12° 28' 40''$; $\delta = +88° 10' 50''$; $\theta = 23° 28' 0''$

$$\begin{aligned}
10 + \log \mathrm{Sin}\,\alpha &= 19{,}3345763 \\
-\log \mathrm{Tang}\,\delta &= 11{,}4980378 \\
\hline
\log \mathrm{Tang}\,u &= 7{,}8365385 \\
u &= 0°\ 23'\ 35{,}65'' \\
\theta &= 23.\ 28.\ 0. \\
\hline
u + \theta &= 23.\ 51.\ 35{,}65. \\
\log \mathrm{Sin}\,(u+\theta) &= 9{,}6069203 \\
+\log \mathrm{Tang}\,\alpha &= 9{,}3449574 \\
\hline
\mathrm{Summe} &= 18{,}9518777 \\
-\log \mathrm{Sin}\,u &= 7{,}8365273 \\
\hline
\log \mathrm{Tang}\,\lambda &= 11{,}1153504 \\
\lambda &= 85°\ 36'\ 55{,}68'' \\
2\,Z = \text{♊} &= 60.\ 0.\ 0. \\
\hline
\lambda &= 2\,Z.\ 25.\ 36.\ 55{,}68.
\end{aligned}$$

2) $\alpha = 139° 18' 30''$; $\delta = -7° 45' 0''$; $\theta = 23° 28' 0''$

$$\begin{aligned}
10 + \log \mathrm{Sin}\,\alpha &= 19{,}8142397 \\
-\log \mathrm{Tang}\,\delta &= 9{,}1338391 \\
\hline
\log \mathrm{Tang}\,u &= 10{,}6804006 \\
u &= -78°\ 12'\ 34'' \\
\theta &= 23.\ 28.\ 0. \\
\hline
u + \theta &= -54.\ 44.\ 34. \\
\log \mathrm{Sin}\,(u+\theta) &= 9{,}9119928 \\
+\log \mathrm{Tang}\,\alpha &= 9{,}9344392 \\
\hline
\mathrm{Summe} &= 19{,}8464320 \\
-\log \mathrm{Sin}\,u &= 9{,}9907388 \\
\hline
\log \mathrm{Tang}\ 35°\ 39'\ 5'' &= 9{,}8556932
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&180.\ 0.\ 0. \\
\hline
&144°\ 20'\ 55'' \\
&120.\ 0.\ 0. = 4\,Z. = \text{♌} \\
\hline
&4\,Z.\ 24°\ 20'\ 55''
\end{aligned}$$

die geſuchte Länge λ.

3) $\alpha = 359° \, 22' \, 33''$; $\delta = +27° \, 55' \, 37''$; $\theta = 23° \, 28' \, 0''$

$$
\begin{array}{rcl}
10 + \log \operatorname{Sin} \alpha & = & 18,037\,1693 \\
- \log \operatorname{Tang} \delta & = & 9,724\,3373 \\
\hline
\log \operatorname{Tang} u & = & 8,312\,8320 \\
u & = & -\ 1° \ 10' \ 38,34'' \\
\theta & = & 23. \ 28. \ 0. \\
\hline
u + \theta & = & +\ 22. \ 17. \ 21,66''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\log \operatorname{Sin} (u + \theta) & = & 9,578\,9647 \\
+ \log \operatorname{Tang} \alpha & = & 8,037\,1951 \\
\hline
\text{Summe} & = & 17,616\,1598 \\
- \log \operatorname{Sin} u & = & 8,312\,7401 \\
\hline
\log \operatorname{Tang} \lambda & = & 9,303\,4197 \\
\lambda & = & 11° \ 22' \ 14,56'' \\
 & = & 0\text{Z.}\ 11° \ 22' \ 14,56''
\end{array}
$$

die gesuchte Länge des Sterns.

Drey Beyſpiele zur 3ten Methode λ zu finden.

1) $\alpha = 12^{\circ}\,28'\,40''$; $\delta = +88^{\circ}\,10'\,50''$; $\theta = 23^{\circ}\,28'\,0''$

	90°	$0'$	$0''$	
$\delta =$	$+88.$	$10.$	$50.$	
$90^{\circ} - \delta =$	$1.$	$49.$	$10.$	$= c$
$\theta =$	$23.$	$28.$	$0.$	$= b$
$90^{\circ} + \alpha =$	$102.$	$28.$	$40.$	$= A$
$\frac{1}{2} A =$	$51.$	$14.$	$20.$	
$b - c =$	$21.$	$38.$	$50.$	
$b + c =$	$25.$	$17.$	$10.$	
$\frac{1}{2}(b - c) =$	$10.$	$49.$	$25.$	
$\frac{1}{2}(b + c) =$	$12.$	$38.$	$35.$	

$\log \text{Cosin} \frac{1}{2}(b - c) =$	$9{,}992\,2043$
$+ \log \text{Cotang} \frac{1}{2} A =$	$9{,}904\,6635$
Summe $=$	$19{,}896\,8678$
$- \log \text{Cosin} \frac{1}{2}(b + c) =$	$9{,}989\,3397$
$\log \text{Tang} \frac{1}{2}(B + C) =$	$9{,}907\,5281$
$\frac{1}{2}(B + C) =$	$38^{\circ}\ 56'\ 44{,}66''$
$\log \text{Sin} \frac{1}{2}(b - c) =$	$9{,}273\,6634$
$+ \log \text{Cotang} \frac{1}{2} A =$	$9{,}904\,6635$
Summe $=$	$19{,}178\,3269$
$- \log \text{Sin} \frac{1}{2}(b + c) =$	$9{,}340\,1993$
$\log \text{Tang} \frac{1}{2}(B - C) =$	$9{,}838\,1276$
$\frac{1}{2}(B - C) =$	$34^{\circ}\ 33'\ 40{,}31''$
$\frac{1}{2}(B + C) =$	$38.\ 56.\ 44{,}66.$
$90^{\circ} - \lambda = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) = C =$	$4.\ 23.\ 4{,}35.$
	$90.\ 0.\ 0.$
$\lambda =$	$85.\ 36.\ 55{,}65.$

2) $\alpha = 139^\circ\ 18'\ 30''$; $\delta = -7^\circ\ 45'\ 0''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 90^\circ & 0' & 0'' \\
\delta = & -7. & 45. & 0. \\
\hline
90^\circ - \delta = & 97. & 45. & 0. = b \\
\theta = & 23. & 28. & 0. = c \\
90^\circ + \alpha = & 229. & 18. & 30. = A \\
\tfrac{1}{2} A = & 114. & 39. & 15. \\
b - c = & 74. & 17. & 0. \\
b + c = & 121. & 13. & 0. \\
\dfrac{b-c}{2} = & 37. & 8. & 30. \\
\dfrac{b+c}{2} = & 60. & 36. & 30.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \text{Cosin}\ \tfrac{1}{2}(b-c) = & 9{,}9015374 \\
+ \log \text{Cotang}\ \tfrac{1}{2} A = & 9{,}6617935 \\
\hline
\text{Summe} = & 19{,}5633309 \\
- \log \text{Cosin}\ \tfrac{1}{2}(b+c) = & 9{,}6908842 \\
\hline
\log \text{Tang} - 36^\circ\ 42'\ 16'' = & 9{,}8724467 \\
\tfrac{1}{2}(B+C) = & -36^\circ\ 42'\ 16'' \\
\log \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}(b-c) = & 9{,}7808844 \\
+ \log \text{Cotang}\ \tfrac{1}{2} A = & 9{,}6617935 \\
\hline
\text{Summe} = & 19{,}4426779 \\
- \log \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}(b+c) = & 9{,}9401603 \\
\hline
\log \text{Tang} - 17^\circ\ 38'\ 38{,}8'' = & 9{,}5025176 \\
\tfrac{1}{2}(B-C) = & -17^\circ\ 38'\ 38{,}8'' \\
\tfrac{1}{2}(B+C) = & -36.\ 42.\ 16. \\
\hline
90^\circ - \lambda = B = & -54.\ 20.\ 54{,}8 \\
 & 90.\ 0.\ 0. \\
\hline
90^\circ - B = \lambda = & 144.\ 20.\ 54{,}8
\end{array}
$$

3) $\alpha = 359° 22' 33''$; $\delta = +27° 55' 37''$; $\theta = 23° 28' 0''$

	90°	0'	0''	
$\delta =$	+27.	55.	37.	
$90° - \delta =$	62.	4.	23.	$= b$
$\theta =$	23.	28.	0.	$= c$
$\alpha =$	359.	22.	33.	
	90.			
$90° + \alpha =$	89.	22.	33.	$= A$
$\frac{1}{2} A =$	44.	41.	16,5.	
$b - c =$	38.	36.	23.	
$\frac{b-c}{2} =$	19.	18.	11,5.	
$b + c =$	85.	32.	23.	
$\frac{b+c}{2} =$	42.	46.	11,5.	

$\log \text{Cosin} \frac{1}{2}(b-c) =$	9,9748719
$+ \log \text{Cotang} \frac{1}{2} A =$	10,0047312
Summe $=$	19,9796031
$- \log \text{Cosin} \frac{1}{2}(b+c) =$	9,8657477
$\log \text{Tang} \frac{1}{2}(B+C) =$	10,1138554
$\frac{1}{2}(B+C) =$	52° 25' 32,88''
$\log \text{Sin} \frac{1}{2}(b-c) =$	9,5192595
$+ \log \text{Cotang} \frac{1}{2} A =$	10,0047312
Summe $=$	19,5239907
$- \log \text{Sin} \frac{1}{2}(b+c) =$	9,8319051
$\log \text{Tang} \frac{1}{2}(B-C) =$	9,6920856
$\frac{1}{2}(B-C) =$	26° 12' 12,54''
$\frac{1}{2}(B+C) =$	52. 25. 32,88.
Summe: $90° - \lambda = B =$	78. 37. 45,42.
	90. 0. 0.
$\lambda =$	11. 22. 14,58.

Beyspiel zur 1sten Methode β zu finden.

$\alpha = 12° 28' 40''$; $\delta = +88° 10' 50''$; $\theta = 23° 28' 0''$

$$
\begin{array}{rcl}
\log \text{Tang}\, \theta & = & 9,6376106 \\
+ \log \text{Sin}\, \alpha & = & 9,3345763 \\
\hline
\text{Summe} & = & 18,9721869 \\
- \log \text{Tang}\, \delta & = & 11,4980378 \\
\hline
2. \log \text{Cosin}\, u & = & 17,4741491 \\
\log \text{Cosin}\, u & = & 8,7370745 \\
u & = & 86° \; 52' \; 15,4'' \\
\log \text{Sin}\, u & = & 9,9993520 \\
\hline
2. \log \text{Sin}\, u & = & 19,9987040 \\
+ \log \text{Cosin}\, \theta & = & 9,9625076 \\
+ \log \text{Sin}\, \delta & = & 9,9997810 \\
\hline
\log \text{Sin}\, \beta & = & 9,9609926 \\
\beta & = & 66° \; 4' \; 40,43'' \text{ Nö.}
\end{array}
$$

Beyspiel zur 2ten Methode β zu finden.

$\alpha = 12° 28' 40''$; $\delta = +88° 10' 50''$; $\theta = 23° 28' 0''$

$$
\begin{array}{rcl}
10 + \log \text{Sin}\, \alpha & = & 19,3345763 \\
- \log \text{Tang}\, \delta & = & 11,4980378 \\
\hline
\log \text{Tang}\, u & = & 7,8365385 \\
u & = & 0° \; 23' \; 35,65'' \\
\theta & = & 23. \; 28. \; 0. \\
\hline
u + \theta & = & 23. \; 51. \; 35,65. \\
\log \text{Cosin}\, (u + \theta) & = & 9,9612014 \\
+ \log \text{Sin}\, \delta & = & 9,9997810 \\
\hline
\text{Summe} & = & 19,9609824 \\
- \log \text{Cosin}\, u & = & 9,9999898 \\
\hline
\log \text{Sin}\, \beta & = & 9,9609926 \\
\beta & = & +66° \; 4' \; 40,43'' \text{ d. i.}
\end{array}
$$

Nördlich.

Oder

$$
\begin{array}{rl}
10 + \log \text{Sin}\,\alpha = & 19{,}3345763 \\
-\log \text{Cotang}\,\theta = & 10{,}3623894 \\
\hline
\log \text{Tang}\,u = & 8{,}9721869 \\
u = & 5^{\circ}\ 21'\ 30{,}49'' \\
\delta = & +\,88.\ 10.\ 50. \\
\hline
\delta - u = & 82.\ 49.\ 19{,}51 \\
\log \text{Sin}\,(\delta - u) = & 9{,}9965829 \\
+\log \text{Cosin}\,\theta = & 9{,}9625076 \\
\hline
\text{Summe} = & 19{,}9590905 \\
-\log \text{Cosin}\,u = & 9{,}9980979 \\
\hline
\log \text{Sin}\,\beta = & 9{,}9609926 \\
\beta = & 66^{\circ}\ 4'\ 40{,}43''\ \text{Nö.}
\end{array}
$$

Beyſpiel zur 3ten Methode β zu finden.

$\alpha = 12^\circ\, 28'\, 40''$; $\delta = +\, 88^\circ\, 10'\, 50''$; $\theta = 23^\circ\, 28'\, 0''$

$$\begin{array}{rl} & 90^\circ\ 0'\ 0'' \\ \delta = & +\,88.\ 10.\ 50. \\ \hline 90^\circ - \delta = & 1^\circ\, 49'\, 10'' = c \\ & \angle\, \theta = a \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} B = & 102.\ 28.\ 40. \\ \tfrac{1}{2} B = & 51.\ 14.\ 20. \\ a - & 23.\ 28.\ 0. \\ c = & 1.\ 49.\ 10. \\ \hline a - c = & 21.\ 38.\ 50. \\ \tfrac{1}{2}(a-c) = & 10.\ 49.\ 25. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} B = & 9{,}8919627 \\ +\log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} B = & 9{,}8919627 \\ +\log \operatorname{Sin} a = & 9{,}6001181 \\ +\log \operatorname{Sin} c = & 8{,}5017432 \\ \hline \text{Summe} = & 37{,}8857867 \\ -\log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a-c) = & 9{,}2736634 \\ \hline \text{Reſt} = & 28{,}6121233 \\ -\log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a-c) = & 9{,}2736634 \\ \hline 2.\ \log \operatorname{Tang} u = & 19{,}3384599 \\ \log \operatorname{Tang} u = & 9{,}6692299 \\ u = & 25^\circ\ 1'\ 41{,}436'' \\ 10 + \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a - c) = & 19{,}2736634 \\ - \log \operatorname{Cosin} u = & 9{,}9571761 \\ \hline \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} b = & 9{,}3164873 \\ \tfrac{1}{2} b = & 11^\circ\ 57'\ 39{,}749'' \\ 90^\circ - \beta = b = & 23^\circ\ 55'\ 19{,}498'' \\ \beta = & +\,66^\circ\ 4'\ 40{,}502'' \end{array}$$

Oder

$$a = 90^\circ - \delta = 1^\circ\ 49'\ 10''$$
$$c = \theta = 23.\ 28.\ 0.$$
$$a + c = 25.\ 17.\ 10.$$
$$\tfrac{1}{2}(a + c) = 12.\ 38.\ 35.$$
$$B = 90^\circ + \alpha = 102.\ 28.\ 40.$$
$$\tfrac{1}{2} B = 51.\ 14.\ 20.$$
$$b = 90^\circ - \beta$$

	log Cosin $\frac{1}{2}$ B =	9,7966262
+	log Cosin $\frac{1}{2}$ B =	9,7966262
	+ log Sin a =	8,5017432
	+ log Sin c =	9,6001181
	Summe =	37,6951137
—	log Sin $\frac{1}{2}$ (a + c) =	9,3401993
	Rest =	28,3549144
—	log Sin $\frac{1}{2}$ (a + c) =	9,3401993
	2. log Cosin u =	19,0147151
	log Cosin u =	9,5073575
	u =	71° 14′ 18,34″
	log Sin $\frac{1}{2}$ (a + c) =	9,3401993
	+ log Sin u =	9,9762881
	log Sin $\frac{1}{2}$ b =	9,3164874
	$\frac{1}{2}$ b =	11° 57′ 39,7585″
	b =	23. 55. 19,5170
		90. 0. 0.
	β =	66° 4′ 40,483″ N.

Drey Beyſpiele zur 4ten Methode λ und β zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ 28' 40''$; $\delta = +88^\circ 10' 50''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$$90^\circ - \delta = 1^\circ\ 49'\ 10''$$

$$\frac{90^\circ + \alpha}{2} = 51.\ 14.\ 20.$$

$$\theta > 90^\circ - \delta$$

alſo

$$\theta - (90^\circ - \delta) = 21^\circ\ 38'\ 50''$$

$$\theta + (90^\circ - \delta) = 25.\ 17.\ 10.$$

und in der Gleichung für Tang λ gebraucht man das *groſse* Segment.

$$\log \text{Cotang}\ \tfrac{1}{2}(90^\circ + \alpha) = 9{,}9046635$$
$$+ \log \text{Sin}\ (\theta \backsim (90^\circ - \delta)) = 9{,}5668977$$
$$\text{Summe} = 19{,}4715612$$
$$- \log \text{Sin}\ (\theta + (90^\circ - \delta)) = 9{,}6305689$$
$$\log \text{Tang}\ u = 9{,}8409923$$
$$u = 34^\circ\ 44'\ 16{,}666''$$
$$+ \tfrac{1}{2}(90^\circ + \alpha) = 51.\ 14.\ 20.$$
$$\textit{groſses}\ \text{Segment} = 85.\ 58.\ 36{,}666''$$
$$\log \text{Cosin}\ \theta = 9{,}9625076$$
$$+ \log \text{Tang} \left\{ \begin{matrix} \text{groſses Segment} \\ = 85^\circ 58' 36{,}67'' \end{matrix} \right. = 11{,}1528422$$
$$\log \text{Tang}\ \lambda = 11{,}1153498$$
$$\lambda = 85^\circ\ 36'\ 55{,}66''$$
$$\log \text{Cosin}\ \alpha = 9{,}9896188$$
$$+ \log \text{Cosin}\ \delta = 8{,}5017432$$
$$\text{Summe} = 18{,}4913620$$
$$- \log \text{Cosin}\ \lambda = 8{,}8833774$$
$$\log \text{Cosin}\ \beta = 9{,}6079846$$
$$\beta = 66^\circ\ 4'\ 40''$$

2) $\alpha = 139^\circ\ 18'\ 30''$; $\delta = -\ 7^\circ\ 45'\ 0''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$

$$90^\circ - \delta = 97^\circ\ 45'\ 0''$$

$$\frac{90^\circ + \alpha}{2} = 114.\ 39.\ 15.$$

$$\theta < 90^\circ - \delta$$

man gebraucht alſo in der Gleichung für Tang λ das *kleine* Segment, und es iſt

$$(90^\circ - \delta) - \theta = 74^\circ\ 17'\ 0''$$
$$(90^\circ - \delta) + \theta = 121.\ 13.\ 0.$$

log Cotang $\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha)$ =	9,661 7935
+ log Sin $(\theta \backsim (90^\circ - \delta))$ =	9,983 4517
Summe =	19,645 2452
— log Sin $(\theta + (90^\circ - \delta))$ =	9,932 0746
log — Tang u =	9,713 1706
u =	$-\ 27^\circ\ 19'\ 18''$ *)
$\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha)$ =	114. 39. 15.
$\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) - u$ Kleines Segment =	141. 58. 33.
log Cosin θ =	9,962 5076
+ log Tang klein. Segments =	9,893 1874
log — Tang $35^\circ\ 39'\ 5''$ =	9,855 6950
180. 0. 0.	
$\lambda = 144^\circ\ 20'\ 55''$	
log Cosin α =	9,879 8005
log Cosin δ =	9,996 0149
Summe =	19,875 8154
log Cosin λ =	9,909 8652
log Cosin β =	9,965 9502
β =	$22^\circ\ 23'\ 35''$

*) Oder u = $152^\circ\ 40'\ 42''$
$\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha)$ = 114. 39. 15.
Klein. Segm. = — 38. 1. 27.
d. i. verneint u. $< 90^\circ$.

3) $\alpha = 359^\circ 22' 33''$; $\delta = +27^\circ 55' 37''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$$90^\circ - \delta = 62^\circ \quad 4' \quad 23''$$

$$\frac{90^\circ + \alpha}{2} = 44.\ 41.\ 16,5.$$

$\theta < 90^\circ - \delta$ man gebraucht daher das kleine Segment.

$$(90^\circ - \delta) - \theta = 38^\circ \ 36' \ 23''$$

$$(90^\circ - \delta) + \theta = 85.\ 32.\ 23.$$

$\log \text{Cotang} \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) =$	10,0047312
$+ \log \text{Sin}(\theta \backsim (90^\circ - \delta)) =$	9,7951614
Summe =	19,7998926
$- \log \text{Sin}(\theta + (90^\circ - \delta)) =$	9,9986827
log Tang u =	9,8012099
u =	32° 19′ 20,1″
$\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) =$	44. 41. 16,5.
$\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) - u$ od. kl. Segm. =	12. 21. 56,4.
$\log \text{Cosin}\ \theta =$	9,9625076
+ log Tang klein. Segm. =	9,3409121
$\log \text{Tang}\ \lambda =$	9,3034197
$\lambda =$	11° 22′ 14,56″
$\log \text{Cosin}\ \alpha =$	9,9999742
$\log \text{Cosin}\ \delta =$	9,9462289
Summe =	19,9462031
$\log \text{Cosin}\ \lambda =$	9,9913910
$\log \text{Cosin}\ \beta =$	9,9548121
$\beta =$	25° 41′ 10,5″.

Vier Beyspiele zur 5ten Methode λ und β zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ\ 28'\ 40''$; $\delta = 88^\circ\ 10'\ 50''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$
Nördlich. Nördlich.

$$\begin{array}{rl}
\log \text{Sin}\ \alpha = & 9{,}3345763 \\
+ \log \text{Cotang}\ \delta = & 8{,}5019622 \\
\hline
\log \text{Cotang}\ x = & 7{,}8365385 \\
x = & 89^\circ\ 36'\ 24'' \\
\theta = & 23.\ 28.\ 0. \\
\hline
x - \theta = y = & 66.\ 8.\ 24. < 90^\circ \\
\theta < & x \\
\log \text{Cosin}\ \alpha = & 9{,}9896189 \\
+ \log \text{Cosin}\ \delta = & 8{,}5017432 \\
\hline
\log \text{Cosin}\ z = & 8{,}4913621 \\
z = & 88^\circ\ 13'\ 25'' \\
\log \text{Tang}\ z = & 11{,}5084454 \\
+ \log \text{Cosin}\ y = & 9{,}6069220 \\
\hline
\log \text{Tang}\ \lambda = & 11{,}1153674 \\
\lambda = & 85^\circ 36' 56'' \\
= & 2Z.25^\circ 36' 56'' \\
= & ♊\ 25.\ 36.\ 56.
\end{array}$$

die gesuchte Länge des Sterns.

$$\begin{array}{rl}
\log \text{Sin}\ y = & 9{,}9612011 \\
+ \log \text{Sin}\ z = & 9{,}9997912 \\
\hline
\log \text{Sin}\ \beta = & 9{,}9609923 \\
\beta = & 66^\circ\ 4'\ 40''
\end{array}$$

Nördlich. die verlangte Breite des Sterns.

2) $\alpha = 139° 18' 30''$; $\delta = 7° 45' 0''$; $\theta = 23° 28' 0''$
Nördlich. Südlich.

$180° - \alpha = 40° 41' 30''$

log Sin 40° 41′ 30″	=	9,8142397
+ log Cotang 7. 45. 0.	=	10,8661609
log Cotang x	=	10,6804006
x	=	11° 47′ 26″
θ	=	23. 28. 0.
$x + \theta = y$	=	35. 15. 26. $< 90°$
log Cosin 40° 41′ 30″	=	9,8798005
+ log Cosin 7. 45. 0.	=	9,9960149
log Cosin z	=	9,8758154
z	=	41° 17′ 48″
log Tang z	=	9,9437014
+ log Cosin y	=	9,9119928
log Tang λ	=	9,8556942
λ	=	35° 39′ 5″
6 Z	=	180. 0. 0.
6 Z — λ	=	144. 20. 55. gesuchte Länge des Sterns.
	=	4 Z. 24° 20′ 55″
	=	♌ 24. 20. 55.
log Sin y	=	9,7613625
+ log Sin z	=	9,8195163
log Sin β	=	9,5808788
β	=	22° 23′ 35″ Südlich.

3) $\alpha = 359^\circ\ 22'\ 33''$; $\delta = 27^\circ\ 55'\ 37''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$
Südlich. Nördlich.

$360^\circ - \alpha = 0^\circ\ 37'\ 27''$

log Sin $0^\circ\ 37'\ 27''$	=	8,0371693
+ log Cotang 27. 55. 37.	=	10,2756627
log Cotang x	=	8,3128320
x	=	$88^\circ\ 49'\ 22''$
θ	=	23. 28. 0.
$x + \theta = y$	=	112. 17. 22. $> 90^\circ$
$180^\circ - y$	=	67. 42. 38.
log Cosin $0^\circ\ 37'\ 27''$	=	9,9999742
+ log Cosin 27. 55. 37.	=	9,9462289
log Cosin z	=	9,9462031
z	=	$27^\circ\ 56'\ 0''$
log Tang z	=	9,7244543
+ log Cosin $67^\circ\ 42'\ 38''$	=	9,5789665
log Tang λ	=	9,3034208
λ	=	$11^\circ\ 22'\ 15''$ die gesuchte
	=	0Z. $11^\circ\ 22'\ 15''$ Länge.
	=	♈ 11. 22. 15.
log Sin $67^\circ\ 42'\ 38''$	=	9,9662730
+ log Sin z	=	9,6706576
log Sin β	=	9,6369306
β	=	$25^\circ\ 41'\ 10''$ Nördlich.

4) $\alpha = 198^\circ\ 17'\ 0''$; $\delta = 9^\circ\ 58'\ 0''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$
Südlich. Südlich.

$\alpha - 180^\circ = 18^\circ\ 17'\ 0''$

$$\begin{array}{rl}
\log \text{Sin } 18^\circ\ 17'\ 0'' = & 9{,}4965370 \\
+ \log \text{Cotang } 9.\ 58.\ 0. = & 10{,}7551611 \\
\hline
\log \text{Cotang } x = & 10{,}2516981 \\
x = & 29^\circ\ 15'\ 19'' \\
\theta = & 23.\ 28.\ 0. \\
\hline
x - \theta = y = & 5.\ 47.\ 19. < 90^\circ \\
\theta < & x \\
\log \text{Cosin } 18^\circ\ 17'\ 0'' = & 9{,}9775026 \\
+ \log \text{Cosin } 9.\ 58.\ 0. = & 9{,}9933959 \\
\hline
\log \text{Cosin } z = & 9{,}9708985 \\
z = & 20^\circ\ 44'\ 30'' \\
 & \\
\log \text{Tang } z = & 9{,}5782951 \\
+ \log \text{Cosin } y = & 9{,}9977798 \\
\hline
\log \text{Tang } \lambda = & 9{,}5760749 \\
\lambda = & 20^\circ\ 38'\ 41'' \\
+ 6\,Z = & 180.\ 0.\ 0. \\
\hline
6\,Z + \lambda = & 200.\ 38.\ 41. \text{ die gesuchte} \\
 & = 6Z.\,20^\circ\ 38'\ 41. \text{ Länge.} \\
 & = ♎\ 20.\ 38.\ 41. \\
 & \\
\log \text{Sin } y = & 9{,}0037127 \\
+ \log \text{Sin } z = & 9{,}5491934 \\
\hline
\log \text{Sin } \beta = & 8{,}5529061 \\
\beta = & 2^\circ\ 2'\ 49'' \text{ Südlich.}
\end{array}$$

die gesuchte Breite.

Vier Beyspiele zur 6ten Methode λ und β zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ 28' 40''$; $\delta = +88^\circ 10' 50''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$

log Sin α	=	9,3345763
+ log Cotang δ	=	8,5019622
log Tang u	=	7,8365385
u	=	0° 23′ 36″
θ	=	23. 28. 0.
u + θ = z	=	23. 51. 36.
log Cosin z	=	9,9612011
+ log Sin δ	=	9,9997810
Summe	=	19,9609821
— log Cosin u	=	9,9999898
log Sin β	=	9,9609923
β	=	66° 4′ 40″ Nördlich.
log Sin z	=	9,6069220
+ log Tang α	=	9,3449574
Summe	=	18,9518794
— log Sin u	=	7,8366347
log Cotang x	=	11,1152447
x	=	4° 23′ 8″
3 Z	=	90. 0. 0.
3 Z — x = λ	=	85. 36. 52.
	=	2 Z. 25° 36′ 52″
	=	♊ 25. 36. 52.

Oder

log Tang β	=	10,3530054
+ log Tang z	=	9,6457209
log Cosin x	=	9,9987263
x	=	4° 23′ 9,5″
3 Z	=	90. 0. 0.
3 Z — x = λ	=	85. 36. 50,5.
	=	2 Z. 25° 36′ 50,5″
	=	♊ 25. 36. 50,5.

2) $\alpha = 139^\circ 18' 30''$; $\delta = -7^\circ 45' 0''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$
$180^\circ - \alpha = 40^\circ 41' 30''$

log Sin 40° 41′ 30″	=	9,8142397
+ log Cotang 7. 45 0.	=	10,8661609
log Tang u	=	10,6804006
u	=	− 78° 12′ 34″ weil δ verneint ist.
θ	=	23. 28. 0.
u + θ = z	=	− 54. 44. 34.
log Cosin z	=	9,7613625
+ log Sin δ	=	9,1298539
Summe	=	18,8912164
— log Cosin u	=	9,3103421
log Sin β	=	9,5808743
β	=	22° 23′ 34″ Südlich.
	=	− 22. 23. 34.
log Sin z	=	9,9119928
+ log Tang 40° 41′ 30″	=	9,9344392
Summe	=	19,8464320
— log Sin u	=	9,9907388
log Cotang x	=	9,8556932
x	=	54° 20′ 55″
3Z	=	90. 0. 0.
3Z + x = λ	=	144. 20. 55.
	=	4Z. 24° 20′ 55″
	=	♌ 24. 20. 55.

Oder:

log Tang β	=	9,6149212
+ log Tang z	=	10,1506303
log Cosin x	=	9,7655515
x	=	54° 20′ 57″
3Z	=	90. 0. 0.
3Z + x = λ	=	144. 20. 57.
	=	4Z. 24° 20′ 57″
	=	♌ 24. 20. 57.

3) $\alpha = 359^\circ 22' 33''$; $\delta = +27^\circ 55' 37''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$360^\circ - \alpha = 0^\circ\ 37'\ 27''$

log Sin 0° 37′ 27″ =	8,0371693
+ log Cotang 27. 55. 37. =	10,2756627
log Tang u =	8,3128320
u =	1° 10′ 38″
θ =	23. 28. 0.
θ — u = z =	22. 17. 22.
log Cosin z =	9,9662730
+ log Sin δ =	9,6705662
Summe =	19,6368392
— log Cosin u =	9,9999083
log Sin β =	9,6369309
β =	25° 41′ 10″ Nö.

log Sin z =	9,5789665
+ log Tang 0° 37′ 27″ =	8,0371951
Summe =	17,6161616
— log Sin u =	8,3127053
log Cotang x =	9,3034563
x =	78° 37′ 42″
3 Z =	90. 0. 0.
3 Z — x = λ =	11. 22. 18.
	= 0 Z. 11. 22. 18.
	= ♈ 11. 22. 18.

Oder

log Tang β =	9,6821171
+ log Tang z =	9,6126935
log Cosin x =	9,2948106
x =	78° 37′ 45″
3 Z =	90. 0. 0.
3 Z — x = λ =	11. 22. 15.
	= 0 Z. 11. 22. 15.
	= ♈ 11. 22. 15.

4) $\alpha = 198° \, 17' \, 0''$; $\delta = -9° \, 58' \, 0''$; $\theta = 23° \, 28' \, 0'$
$\alpha - 180° = 18° \, 17' \, 0''$

$$
\begin{array}{rl}
\log \text{Sin } 18° \; 17' \; 0'' = & 9,4965370 \\
+ \log \text{Cotang } 9. \; 58. \; 0. = & 10,7551611 \\
\hline
\log \text{Tang } u = & 10,2516981 \\
u = & 119° \; 15' \; 19'' \\
\theta = & 23. \; 28. \; 0. \\
\hline
u - \theta = z = & 95. \; 47. \; 19. \\
\log \text{Cosin } z = & 9,0037127 \\
+ \log \text{Sin } \delta = & 9,2382349 \\
\hline
\text{Summe} = & 18,2419476 \\
- \log \text{Cosin } u = & 9,6890438 \\
\hline
\log \text{Sin } \beta = & 8,5529038 \\
\beta = & -2° \; 2' \; 49''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \text{Sin } z = & 9,9977798 \\
+ \log \text{Tang } 18° \; 17' \; 0'' = & 9,5190344 \\
\hline
\text{Summe} = & 19,5168142 \\
- \log \text{Sin } u = & 9,9407410 \\
\hline
\log \text{Cotang } x = & 9,5760732 \\
x = & 180° - 69° \; 21' \; 19'' \quad \text{weil} \\
= & 110° \; 38' \; 41'' \quad u > \theta \\
3Z = & 90. \; 0. \; 0. \\
\hline
3Z + x = \lambda = & 200. \; 38. \; 41. \\
= & 6Z. \; 20. \; 38. \; 41. \\
= & ♎ \; 20. \; 38. \; 41.
\end{array}
$$

Oder

$$
\begin{array}{rl}
\log \text{Tang}\ \beta = & 8{,}5531682 \\
+ \log \text{Tang}\ z = & 10{,}9940671 \\
\hline
\log \text{Cosin}\ x = & 9{,}5472353 \\
x = & 180^\circ - 69^\circ\ 21'\ 22'' \\
= & 110^\circ\ 38'\ 38'' \\
3\ Z = & 90.\ \ 0.\ \ 0. \\
\hline
3Z + x = \lambda = & 200.\ 38.\ 38. \\
= & 6Z.\ 20^\circ\ 38'\ 38'' \\
= & ♎\ 20.\ 38.\ 38.
\end{array}
$$

Vier Beyspiele zur 7ten Methode λ und β zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ 28' 40''$; $\delta = +88^\circ 10' 50''$; $\theta = 23^\circ 28' 0''$

$$\theta + \delta = 111^\circ\ 38'\ 50''$$
$$\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) = 55.\ 49.\ 25.$$
$$45^\circ = 45.\ 0.\ 0.$$
$$\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ = 10.\ 49.\ 25.$$
$$\theta - \delta = -64.\ 42.\ 50.$$
$$\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) = -32.\ 21.\ 25.$$
$$45^\circ = 45.\ 0.\ 0.$$
$$\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ = 12.\ 38.\ 35.$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 6.\ 14.\ 20.$$
$$45^\circ = 44.\ 59.\ 60.$$
$$45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha = 38.\ 45.\ 40.$$
$$\log \text{Cosin}\ [\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] = 9,992\,2043$$
$$+ \log \text{Tang}\ (45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = 9,904\,6635$$
$$\text{Summe} = 19,896\,8678$$
$$- \log \text{Cosin}\ [\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] = 9,989\,3397$$
$$\log \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] = 9,907\,5281$$
$$\tfrac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] = 38^\circ\ 56'\ 45''$$

$$\log \text{Sin}\ [\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] = 9,273\,6634$$
$$+ \log \text{Tang}\ (45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = 9,904\,6635$$
$$\text{Summe} = 19,178\,3269$$
$$- \log \text{Sin}\ [\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] = 9,340\,1992$$
$$\log \text{Tang}\ \tfrac{1}{2}[x - (90^\circ - \lambda)] = 9,838\,1277$$
$$\tfrac{1}{2}[x - (90^\circ - \lambda)] = 34^\circ\ 33'\ 40''$$
$$\tfrac{1}{2}[x + (90^\circ - \lambda)] = 38.\ 56.\ 45.$$
$$90^\circ - \lambda = 4.\ 23.\ 5.$$
$$\lambda = 85.\ 36.\ 55.$$
$$\log \text{Cosin}\ \alpha = 9,989\,6188$$
$$+ \log \text{Cosin}\ \delta = 8,501\,7432$$
$$\text{Summe} = 18,491\,3620$$
$$- \log \text{Cosin}\ \lambda = 8,883\,3955$$
$$\log \text{Cosin}\ \beta = 9,607\,9665$$
$$\beta = 66^\circ\ 4'\ 44''$$

2) $\alpha = 139^\circ\ 18'\ 30''$; $\delta = -\ 7^\circ\ 45'\ 0''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$

$\theta + \delta =$	$15^\circ\ 43'\ 0''$
$\frac{1}{2}(\theta + \delta) =$	$7.\ 51.\ 30.$
$45^\circ =$	$45.\ 0.\ 0.$
$\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ =$	$-\ 37.\ 8.\ 30.$
$\theta - \delta =$	$31.\ 13.\ 0.$
$\frac{1}{2}(\theta - \delta) =$	$15.\ 36.\ 30.$
$45^\circ =$	$45.\ 0.\ 0.$
$\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ =$	$60.\ 36.\ 30.$
$\frac{1}{2}\alpha =$	$69.\ 39.\ 15.$
$45^\circ =$	$45.\ 0.\ 0.$
$45^\circ - \frac{1}{2}\alpha =$	$-\ 24.\ 39.\ 15.$
$\log \text{Cosin}\left[\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ\right] =$	$9{,}9015374$
$+ \log \text{Tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) =$	$9{,}6617936$
Summe $=$	$19{,}5633310$
$- \log \text{Cosin}\left[\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ\right] =$	$9{,}6908842$
$\log \text{Tang}\ \frac{1}{2}\left[x + (90^\circ - \lambda)\right] =$	$9{,}8724468$
$\frac{1}{2}\left[x + (90^\circ - \lambda)\right] =$	$-\ 36^\circ\ 42'\ 16''$
$\log \text{Sin}\left[\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ\right] =$	$9{,}7808844$
$+ \log \text{Tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) =$	$9{,}6617936$
Summe $=$	$19{,}4426780$
$- \log \text{Sin}\left[\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ\right] =$	$9{,}9401603$
$\log \text{Tang}\ \frac{1}{2}\left[x - (90^\circ - \lambda)\right] =$	$9{,}5025177$
$\frac{1}{2}\left[x - (90^\circ - \lambda)\right] =$	$17^\circ\ 38'\ 39''$
$\frac{1}{2}\left[x + (90^\circ - \lambda)\right] =$	$-\ 36.\ 42.\ 16.$
$90^\circ - \lambda =$	$-\ 54.\ 20.\ 55.$
$\lambda =$	$144.\ 20.\ 55.$
$\log \text{Cosin}\ \alpha =$	$9{,}8798005$
$+ \log \text{Cosin}\ \delta =$	$9{,}9960149$
Summe $=$	$19{,}8758154$
$- \log \text{Cosin}\ \lambda =$	$9{,}9098652$
$\log \text{Cosin}\ \beta =$	$9{,}9659502$
$\beta =$	$22^\circ\ 23'\ 35''$

3) $\alpha = 359^\circ\ 22'\ 33''$; $\delta = +27^\circ\ 55'\ 37''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$

$$\begin{aligned}
\theta + \delta &= 51^\circ\ 23'\ 37'' \\
\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) &= 25.\ 41.\ 48{,}5. \\
45^\circ &= 45.\ 0.\ 0. \\
\hline
\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ &= -19.\ 18.\ 12. \\
\theta - \delta &= -\ 4.\ 27.\ 37. \\
\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) &= -\ 2.\ 13.\ 48{,}5. \\
45^\circ &= 45.\ 0.\ 0. \\
\hline
\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ &= 42.\ 46.\ 12. \\
\tfrac{1}{2}\alpha &= 179.\ 41.\ 16{,}5. \\
45^\circ &= 45.\ 0.\ 0. \\
\hline
\tfrac{1}{2}\alpha - 45^\circ &= 134.\ 41.\ 16. \\
\log \text{Cosin}\,[\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] &= 9{,}9748716 \\
+ \log \text{Tang}\,(\tfrac{1}{2}\alpha - 45^\circ) &= 10{,}0047333 \\
\hline
\text{Summe} &= 19{,}9796049 \\
- \log \text{Cosin}\,[\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] &= 9{,}8657467 \\
\hline
\log \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)] &= 10{,}1138582 \\
\tfrac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)] &= -\ 52^\circ\ 25'\ 34''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \text{Sin}\,[\tfrac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ] &= 9{,}5192625 \\
+ \log \text{Tang}\,(\tfrac{1}{2}\alpha - 45^\circ) &= 10{,}0047333 \\
\hline
\text{Summe} &= 19{,}5239958 \\
- \log \text{Sin}\,[\tfrac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ] &= 9{,}8319063 \\
\hline
\log \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}[x - (\lambda - 90^\circ)] &= 9{,}6920895 \\
\tfrac{1}{2}[x - (\lambda - 90^\circ)] &= 26^\circ\ 12'\ 13'' \\
\tfrac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)] &= -\ 52.\ 25.\ 34. \\
\hline
\lambda - 90^\circ &= -\ 78.\ 37.\ 47. \\
\lambda &= 11.\ 22.\ 13. \\
\log \text{Cosin}\,\alpha &= 9{,}9999742 \\
+ \log \text{Cosin}\,\delta &= 9{,}9462289 \\
\hline
\text{Summe} &= 19{,}9462031 \\
- \log \text{Cosin}\,\lambda &= 9{,}9913916 \\
\hline
\log \text{Cosin}\,\beta &= 9{,}9548115 \\
\beta &= 25^\circ\ 41'\ 11''
\end{aligned}$$

4) $\alpha = 198^\circ\ 17'\ 0''$; $\delta = 9^\circ\ 58'\ 0''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$

$\theta + \delta$	$=$	13°	$30'$	$0''$
$\frac{1}{2}(\theta+\delta)$	$=$	6.	45.	0.
45°	$=$	45.	0.	0.
$\frac{1}{2}(\theta+\delta) - 45^\circ$	$= -$	38.	15.	0.
$\theta - \delta$	$=$	33.	26.	0.
$\frac{1}{2}(\theta - \delta)$	$=$	16.	43.	0.
45°	$=$	45.	0.	0.
$\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ$	$=$	61.	43.	0.
$\frac{1}{2}\alpha$	$=$	99.	8.	30.
45°	$=$	45.	0.	0.
$\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ$	$=$	54.	8.	30.
$\log \text{Cosin}\,[\frac{1}{2}(\theta+\delta) - 45^\circ]$	$=$	9,895 0450		
$+ \log \text{Tang}\,(\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ)$	$=$	10,140 9989		
Summe	$=$	20,036 0439		
$- \log \text{Cosin}\,[\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ]$	$=$	9,675 6245		
$\log \text{Tang}\,\frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)]$	$=$	10,360 4194		
$\frac{1}{2}[x + (\lambda - 90^\circ)]$	$=$	66°	$26'$	$18''$

$$\log \text{Sin}\left[\tfrac{1}{2}(\theta+\delta)-45^\circ\right] = 9{,}7917566$$
$$+\log \text{Tang}\left(\tfrac{1}{2}\alpha - 45^\circ\right) = 10{,}1409989$$

$$\text{Summe} = 19{,}9327555$$
$$-\log \text{Sin}\left[\tfrac{1}{2}(\theta-\delta)+45^\circ\right] = 9{,}9447862$$

$$\log \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\left[x-(\lambda-90^\circ)\right] = 9{,}9879693$$
$$\tfrac{1}{2}\left[x-(\lambda-90^\circ)\right] = -44^\circ\ 12'\ 23''$$
$$\tfrac{1}{2}\left[x+(\lambda-90^\circ)\right] = 66.\ 26.\ 18.$$

$$\lambda - 90^\circ = 110.\ 38.\ 41.$$
$$\lambda = 200.\ 38.\ 41.$$
$$\log \text{Cosin}\,\alpha = 9{,}9775026$$
$$+\log \text{Cosin}\,\delta = 9{,}9933959$$

$$\text{Summe} = 19{,}9708985$$
$$-\log \text{Cosin}\,\lambda = 9{,}9711759$$

$$\log \text{Cosin}\,\beta = 9{,}9997226$$
$$\beta = 2^\circ\ 2'\ 51''\ \text{oder}\ 52''$$

Zwey Beyspiele zur 8ten Methode λ und β zu finden.

1) $\alpha = 12^\circ\, 28'\, 40''$; $\delta = +\, 88^\circ\, 10'\, 50''$; $\theta = 23^\circ\, 28'\, 0''$

$$\delta - \theta = 64^\circ\ 42'\ 50''$$
$$\text{Sin}\,(\delta - \theta) = +\,0{,}904\,1861$$
$$\text{Sin}\,\alpha = +\,0{,}216\,061$$
$$1 = 1{,}000\,000$$

$$1 - \text{Sin}\,\alpha = +\,0{,}783\,939$$

$$\text{Log}\,(1 - \text{Sin}\,\alpha) = 9{,}894\,2823 - 10$$
$$+\log \text{Sin}\,\theta = 9{,}600\,1181 - 10$$
$$+\log \text{Cosin}\,\delta = 8{,}501\,7432 - 10$$

$$\text{Summe} = 7{,}996\,1436 - 10$$
$$= \log\,[(1 - \text{Sin}\,\alpha).\,\text{Sin}\,\theta.\,\text{Cos}\,\delta]$$

$$(1 - \text{Sin}\,\alpha).\,\text{Sin}\,\theta.\,\text{Cosin}\,\delta = 0{,}009\,9116$$
$$+\,\text{Sin}\,(\delta - \theta) = 0{,}904\,1861$$

$$\text{Sin}\,\beta = 0{,}914\,0977$$
$$\beta = +\,66^\circ\ 4'\ 40''$$
$$\log \text{Cosin}\,\alpha = 9{,}989\,6188$$
$$\log \text{Cosin}\,\delta = 8{,}501\,7432$$

$$\text{Summe} = 18{,}491\,3620$$
$$\log \text{Cosin}\,\beta = 9{,}607\,9867$$

$$\log \text{Cosin}\,\lambda = 8{,}883\,3753$$
$$\lambda = 85^\circ\ 36'\ 55{,}73''$$

2) $\alpha = 198^\circ\ 17'\ 0''$; $\delta = -9^\circ\ 58'\ 0''$; $\theta = 23^\circ\ 28'\ 0''$.

$$\begin{aligned}
\delta + \theta &= 13^\circ\ 30'\ 0'' \\
\text{Sin}\,(\delta + \theta) &= 0{,}2334454 \\
\text{Sin}\ \alpha &= -\,0{,}3137163 \\
1 &= 1{,}0000000 \\
\hline
1 + \text{Sin}\ \alpha &= 0{,}6862837 \\
\log\,(1 + \text{Sin}\,\alpha) &= 9{,}8365039 - 10 \\
+ \log \text{Sin}\ \theta &= 9{,}6001181 - 10 \\
+ \log \text{Cosin}\ \delta &= 9{,}9933959 - 10 \\
\hline
\text{Summe} &= 9{,}4300179 - 10 \\
&= \log\,[(1 + \text{Sin}\,\alpha)\,.\,\text{Sin}\,\theta\,.\,\text{Cos}\,\delta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + \text{Sin}\,\alpha)\,.\,\text{Sin}\,\theta\,.\,\text{Cosin}\,\delta &= 0{,}269165 \\
\text{Sin}\,(\delta + \theta) &= 0{,}233445 \\
\hline
\text{Sin}\ \beta &= -\,0{,}035720 \\
\beta &= -\ 2^\circ\ 2'\ 49''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Log Cosin}\ \alpha &= 9{,}9775026 \\
+ \log \text{Cosin}\ \delta &= 9{,}9933959 \\
\hline
\text{Summe} &= 19{,}9708985 \\
- \log \text{Cosin}\ \beta &= 9{,}9997228 \\
\hline
\log - \text{Cosin}\ 20^\circ\ 30'\ 41'' &= 9{,}9711757 \\
\lambda &= 180^\circ + 20^\circ\ 38'\ 41'' \\
&= 200.\ 38.\ 41.
\end{aligned}$$

Drey Beyſpiele zur 5ten Methode α und δ zu finden.

1) $\lambda = 110° 33' 46''$; $\beta = 4° 31' 15''$; $\epsilon = 23° 27' 54''$ Südlich.

$180° - \lambda = 69° 26' 14''$

Log Sin 69° 26′ 14″	=	9,9714094
+ log Cotang 4. 31. 15.	=	11,1020016
log Cotang x	=	11,0734110
x	=	4° 49′ 37″
ϵ	=	23. 27. 54. > x
ϵ — x = y	=	18. 38. 17. < 90°
Log Cosin 69° 26′ 14″	=	9,5455959
+ log Cosin 4. 31. 15.	=	9,9986467
log Cosin z	=	9,5442426
z	=	69° 30′ 15″
log Tang z	=	10,4273586
+ log Cosin y	=	9,9766050
log Tang α	=	10,4039636
α	=	68° 28′ 16″
180°	=	180. 0. 0.
180° — α	=	111. 31. 44. die geſuchte gerade Aufſteigung.
log Sin y	=	9,5045915
+ log Sin z	=	9,9715994
log Sin δ	=	9,4761909
δ	=	17° 25′ 9″ Nördlich.

2). $\lambda = 151^\circ\ 0'\ 0''$; $\beta = 1^\circ\ 3'\ 0''$; $\theta = 23^\circ\ 27'\ 54''$
Nördlich.

$180^\circ - \lambda = 29^\circ\ 0'\ 0''$

Log Sin $29^\circ\ 0'\ 0'' = 9,6855712$
+ log Cotang $1.\ 3.\ 0. = 11,7368847$

---

log Cotang $x = 11,4224559$
$x = 2^\circ\ 9'\ 54''$
$\theta = 23.\ 27.\ 54.$

$x + \theta = y = 25.\ 37.\ 48. < 90^\circ$

Log Cosin $29^\circ\ 0'\ 0'' = 9,9418193$
+ log Cosin $1.\ 3.\ 0. = 9,9999271$

---

log Cosin $z = 9,9417464$
$z = 29^\circ\ 1'\ 2''$
log Tang $z = 9,7440598$
+ log Cosin $y = 9,9550169$

---

log Tang $\alpha = 9,6990767$
$\alpha = 26^\circ\ 34'\ 14''$
$180^\circ = 179.\ 59.\ 60.$

$180^\circ - \alpha = 153.\ 25.\ 46.$ die gesuchte Rectascension.

log Sin $y = 9,6360442$
+ log Sin $z = 9,6858066$

---

log Sin $\delta = 9,3218508$
$\delta = 12^\circ\ 6'\ 43''$ Nördlich.

3) $\lambda = 6 Z. 20^\circ 21' 18''$; $\beta = 2^\circ 2' 5''$; $\theta = 23^\circ 28' 20''$
Südlich.

$\lambda - 6 Z = 20^\circ\ 21'\ 18''$

Log Sin $20^\circ 21' 18''$ =	9,541 3743	
+ log Cotang 2. 2. 5. =	11,449 4349	
log Cotang x =	10,990 8092	
x =	$5^\circ\ 49'\ 55''$	
θ =	23. 28. 20.	
$x + \theta = y$ =	29. 18. 15. $< 90^\circ$	
log Cosin $20^\circ 21' 18''$ =	9,971 9970	
+ log Cosin 2. 2. 5. =	9,999 7261	
log Cosin z =	9,971 7231	
z =	$20^\circ\ 27'\ 8''$	
log Tang z =	9,571 6326	
+ log Cosin y =	9,940 5333	
log Tang α =	9,512 1659	
α =	$18^\circ\ 0'\ 54''$	
180° =	180. 0. 0.	
$180^\circ + \alpha$ =	198. 0. 54.	Rectaſcenſion.
log Sin y =	9,689 7047	
+ log Sin z =	9,543 3555	
log Sin δ =	9,233 0602	
δ =	$9^\circ\ 50'\ 51''$	Südliche Declination.

Fig. I.

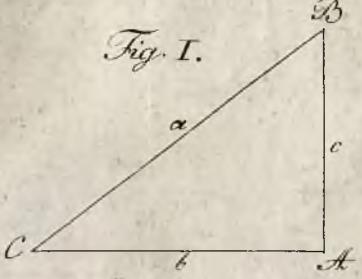


Fig. II.



Fig. III.

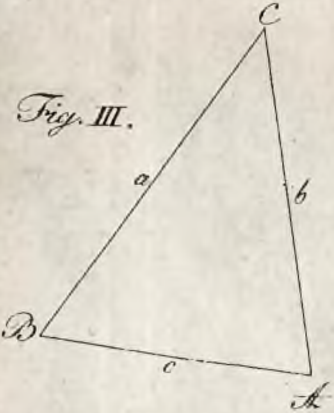


Fig. IV.

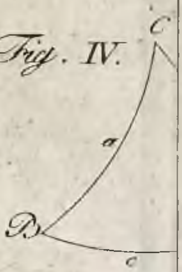


Fig. V.

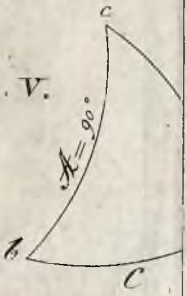


Fig. VI.

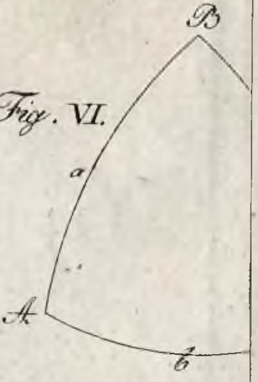


Fig. XIII.

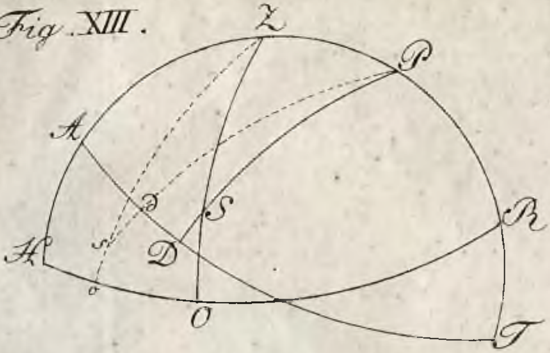


Fig. XIV.

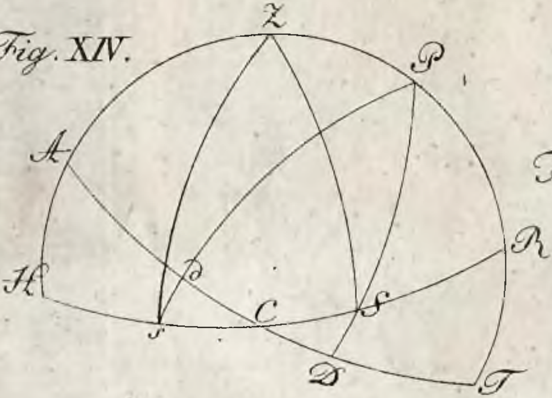


Fig. XV.

